Wiskunde voor bachelor en master

Wiskunde voor bachelor en master

Deel 6 Fouriertheorie met toepassingen

Anne Kaldewaij

2024, Syntax Media, Amersfoort

ISBN 978 94 91764 57 8
NUR 123

Ontwerp omslag: Agraphics Design

Eindredactie: Redactie & zo, ir. Caroline van der Meulen

Vragen en opmerkingen over deze uitgave kunt u richten aan:

info@syntaxmedia.nl

www.syntaxmedia.nl

Over de serie

Er is behoefte aan een degelijke wiskundekennis in tal van studies op hogescholen en universiteiten. Studenten dienen te beschikken over wiskundig inzicht waarmee zij de wiskundige toepassingen aankunnen die in andere vakken worden gebruikt.

Met de serie *Wiskunde voor bachelor en master* leer je hoe je in de praktijk met wiskunde omgaat. Dit zie je terug in de aanpak: veel uitleg met toepassingen en weinig bewijzen in strikt wiskundige zin. Elk deel bevat veel voorbeelden en heeft een grote verzameling opgaven, waaruit de docent een gerichte keus kan maken.

De eerste twee delen vormen de basis van de serie:

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden
Deel 2 Differentiaalrekening en integraalrekening

De overige delen sluiten hier naadloos op aan, maar zijn gericht op meer specifieke onderwerpen:

Deel 3 Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen
Deel 4 Vectorrekening en matrixrekening
Deel 5 De Laplace-transformatie met toepassingen
Deel 6 Fouriertheorie met toepassingen

De vervolgdelen kunnen onafhankelijk van elkaar worden gebruikt. Sommige passen in de bachelorfase en andere bij specifieke masters.

Over deel 6

Deel 6 van de serie *Wiskunde voor bachelor en master* biedt een behandeling van Fouriertheorie met verschillende toepassingen. Het betreft klassieke Fourierreeksen, Fourierintegralen, de continue Fourier-transformatie en de modernere discrete Fourier-transformatie (de DFT).

Het boek is een uitstekende basis voor het gebruik van Fouriertheorie binnen vakgebieden als natuurkunde, informatica, elektrotechniek en kunstmatige intelligentie.

De benodigde voorkennis bestaat uit onderwerpen van deel 2, *Differentiaalrekening en integraalrekening*, met name het vlot kunnen differentiëren en integreren. In het laatste hoofdstuk wordt beperkt gebruikgemaakt van matrixrekening, een onderwerp dat in deel 4, *Vectorrekening en matrixrekening*, uitgebreider aan de orde komt.

Na een inleiding in hoofdstuk 1 komen reële Fourierreeksen aan bod in hoofdstuk 2. Op basis hiervan wordt in hoofdstuk 3 de complexe Fourierreeks geïntroduceerd. Tal van voorbeelden en opgaven maken de student hiermee vertrouwd.

De impulsfunctie van Dirac is hoofdonderwerp van hoofdstuk 4. Hierbij wordt expliciet aandacht gegeven aan de relatie tussen model en werkelijkheid. Ook de periodieke pulstrein komt hier aan de orde, als voorbereiding op de theorie rond bemonsteren en het gebruik van digitale signalen.

In hoofdstuk 5 komen het amplitudespectrum en fasespectrum aan bod. Lineaire tijdsinvariante systemen met hun systeemfunctie worden in hoofdstuk 6 behandeld. Dit hoofdstuk biedt de keuze om de theorie toe te passen op klassieke systemen uit de mechanica of de elektrotechniek.

Hoofdstuk 7 en 8 betreffen de Fourierintegraal en de Fourier-transformatie. Hierbij wordt een duidelijke relatie gelegd met Fourierreeksen.

Hoofdstuk 9 betreft het convolutieproduct en het gebruik daarvan bij het ontwerpen van systemen zoals filters.

Het geheel van de stof komt samen in hoofdstuk 10 bij de behandeling van discrete signalen. De Nyquist-frequentie, het bemonsteringstheorema, de discrete Fourier-transformatie, de convolutie bij eindige discrete signalen en het gebruik van de Fast Fourier Transform komen allemaal aan bod. Het levert de basis voor het begrip dat nodig is bij talrijke toepassingen van deze theorie in het verwerken van beeld en geluid.

Alle stof wordt toegankelijk uitgelegd en toegelicht. Net als in de voorgaande delen van de serie is er een uitgebreide verzameling opgaven, waaruit een gerichte keus gemaakt kan worden. In het boek zijn antwoorden van de opgaven opgenomen.

Volledige uitwerkingen van alle opgaven staan in een apart uitwerkingenboek. Dit komt zeker van pas bij zelfstudie. Het uitwerkingenboek kan via de website van de uitgever (*www.syntaxmedia.nl*) of bij een boekhandel worden besteld.

Mijn dank gaat uit naar dr. Hans Fischer voor zijn commentaar op onderdelen van het boek, de discussies die we daarover hadden en het materiaal dat hij beschikbaar stelde.

januari 2024

dr. Anne Kaldewaij

Notaties

De volgende notaties worden in de serie gebruikt.

$P \Rightarrow Q$	als P dan Q, Q volgt uit P
$P \Leftrightarrow Q$	P is equivalent met Q, P en Q volgen uit elkaar, P is waar precies dan als Q is waar
$\mathbb{N}$	de verzameling natuurlijke getallen $\{0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots\}$
$\mathbb{Z}$	de verzameling gehele getallen $\{\,0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3, \cdots\}$
$\mathbb{Q}$	de verzameling rationale getallen
$\mathbb{R}$	de verzameling reële getallen
$\mathbb{C}$	de verzameling complexe getallen
$[\,a, b\,]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[\,a, b\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$[\,a, \infty\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
$\langle -\infty, a\rangle$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
	evenzo: $\langle a, b\,]$, $\langle a, b\rangle$, $\langle a, \infty\rangle$ en $\langle -\infty, \infty\rangle$, al deze verzamelingen heten *intervallen*
$\lvert x\rvert$	de absolute waarde van x, gedefinieerd door: $\lvert x\rvert = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x \leq 0 \end{cases}$ merk op dat $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
$\vec{a}$, $\mathbf{a}$, $\vec{E}$, $\mathbf{E}$	vectoren
$\lvert\vec{a}\rvert$	de lengte van de vector $\vec{a}$
$a \approx b$	a is ongeveer (bij benadering) gelijk aan b
$p \vee q$	p is waar of q is waar of beide zijn waar
$p \wedge q$	p is waar en q is waar

Een aantal Griekse letters

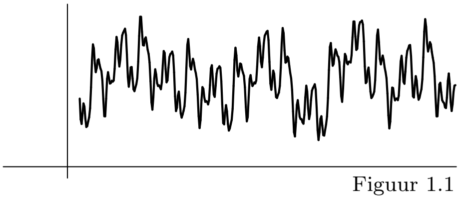
α alfa	ζ zèta	ν nu	τ tau
β bèta	η èta	ξ ksi	ϕ phi
γ gamma	θ thèta	π pi	χ chi
δ delta	λ lambda	ρ rho	ψ psi
ε epsilon	μ mu	σ sigma	ω omega

Inhoud

1 Wat Fouriertheorie is

1.1 Tijd en frequentie

De grafiek in figuur 1.1 is de weergave van een deel van een geluidsopname. Het is een klassieke grafiek met op de horizontale as de tijd en op de verticale as de meetwaarde.



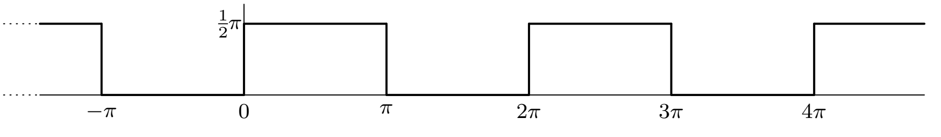
Figuur 1.1

Met zo'n grafiek kun je niet goed rekenen. Je kunt er ook niet veel aan zien. Het signaal is een combinatie van trillingen, elk met een eigen frequentie.

Om het signaal uit de grafiek te kunnen analyseren, wil je weten welke frequenties erin voorkomen en met welk gewicht. Ook bij pianomuziek heb je weinig aan de grafiek van een opname. In plaats daarvan gebruik je bladmuziek, waarin frequenties zijn beschreven als noten in een notenbalk en hun sterkte in aanwijzingen als pianissimo.

De Fouriertheorie levert methoden en technieken om een signaal, beschreven als functie van de tijd, vast te leggen als functie van de frequentie. Fouriertheorie is genoemd naar Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), een Franse wis- en natuurkundige. Hij liet zien hoe elk periodiek signaal is te schrijven als een, eventueel oneindige, som van trillingen. Je krijgt dan de *Fourierreeks* van het signaal.

Als voorbeeld geven we de Fourierreeks die hoort bij het signaal van figuur 1.2. Dit is een zogeheten *blokgolf*. Het signaal heeft waarde 0 tussen $-\pi$ en 0 en waarde $\frac{1}{2}\pi$ tussen 0 en π. Verder herhaalt de grafiek zich naar links en rechts. Het is een periodiek signaal met periode 2π.

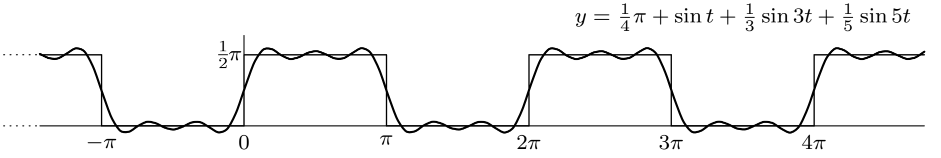


Figuur 1.2

Met de technieken van hoofdstuk 2 kun je berekenen dat de Fourierreeks van deze blokgolf gelijk is aan de oneindig voortlopende reeks:

$$\tfrac{1}{4}\pi + \sin t + \tfrac{1}{3}\sin 3t + \tfrac{1}{5}\sin 5t + \tfrac{1}{7}\sin 7t + \tfrac{1}{9}\sin 9t + \cdots$$

Het beginstuk $\frac{1}{4}\pi + \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t$ is in figuur 1.3 weergegeven.



Figuur 1.3

In de figuur kun je zien dat deze benadering al op de blokgolf lijkt. Neem je op een grafische rekenmachine of in Geogebra de termen $\frac{1}{7}\sin 7t + \frac{1}{9}\sin 9t$ er ook bij, dan krijg je een nog betere benadering van de blokgolf.

Fourier gebruikte zijn methode om te kunnen berekenen hoe warmte stroomt door een metalen staaf die aan de ene kant wordt verhit en aan de andere kant gekoeld. De daarbij horende vergelijkingen kunnen niet op een standaardmanier worden opgelost, maar wel als je Fourierreeksen gebruikt.

1.2 Fourierintegralen en de Fourier-transformatie

Later bleek Fouriertheorie ook toepasbaar op niet-periodieke signalen. Elke functie van de tijd kun je omzetten naar een functie van de frequentie. Een periodieke functie kun je schrijven als Fourierreeks en een niet-periodieke functie kun je schrijven als Fourierintegraal. Zo'n functie kun je daarbij omzetten naar een functie van de frequentie en deze omzetting heet de Fourier-transformatie. Zo kun je elk signaal bestuderen in het tijddomein en in het frequentiedomein.

Eerste toepassingen van Fourierreeksen en Fourier-transformaties vind je vooral in de wis- en natuurkunde en de elektrotechniek. Het werd toegepast bij lineaire systemen, net als de Laplace-transformatie (deel 5). Ook het analyseren en bewerken van signalen (audio en video), zoals het filteren van achtergrondruis, waren vroege toepassingen.

1.3 De digitalisering

In de tweede helft van de twintigste eeuw kwamen nieuwe inzichten, die een aanzet waren tot de moderne wereld zoals we die nu kennen. Dit is de wereld van digitale communicatie, spraakherkenning, gezichtsherkenning, beeldbewerking, streaming, digitale radio en televisie, wifi, mobiele telefoons met allerlei apps, enzovoort.

3.1.1 Complexe getallen en de complexe e-macht

Complexe getallen zijn getallen van de vorm $a + b\mathrm{j}$, ook geschreven als $a + \mathrm{j}b$, met a en b reële getallen en j een vast gekozen letter. Je rekent hiermee als met gewone getallen en letters, waarbij je echter overal j^2 vervangt door -1.

Voor $a + 0\mathrm{j}$ schrijf je a en voor $0 + b\mathrm{j}$ schrijf je ook $b\mathrm{j}$.
De verzameling complexe getallen geven we aan met $\mathbb{C}$.

Het symbool j met $\mathrm{j}^2 = -1$ wordt de imaginaire eenheid genoemd. In de wiskunde wordt het symbool i gebruikt (van imaginair), maar bij signaaltheorie kan dat verwarring geven met de i van stroomsterkte. Gezien de gebruikte toepassingen uit dat vakgebied, hanteren we in dit deel ook de letter j.

Voorbeelden

1. $(3 - 2\mathrm{j}) + (1 + 5\mathrm{j}) = 4 + 3\mathrm{j}$
2. $(1 + 3\mathrm{j})(5 + 2\mathrm{j}) = 5 + 2\mathrm{j} + 15\mathrm{j} + 6\mathrm{j}^2 = -1 + 17\mathrm{j}$
3. $\dfrac{1 + 2\mathrm{j}}{2 + \mathrm{j}} = \dfrac{(1 + 2\mathrm{j})(2 - \mathrm{j})}{(2 + \mathrm{j})(2 - \mathrm{j})} = \dfrac{2 - \mathrm{j} + 4\mathrm{j} - 2\mathrm{j}^2}{4 - \mathrm{j}^2} = \dfrac{4 + 3\mathrm{j}}{5} = 0{,}8 + 0{,}6\mathrm{j}$
4. $\dfrac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$ en $\dfrac{1}{-\mathrm{j}} = \mathrm{j}$

Is $z = a + b\mathrm{j}$, dan heet a het reële deel van z, notatie $\mathrm{Re}(z)$, en b het imaginaire deel van z, notatie $\mathrm{Im}(z)$. $\mathrm{Re}(z)$ en $\mathrm{Im}(z)$ zijn reële getallen.

Complexe getallen kun je meetkundig voorstellen als punten in het xy-vlak.

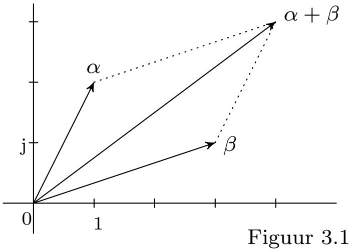
Het complexe getal $a + b\mathrm{j}$ correspondeert hierbij met het punt (a, b). In dit verband heet de x-as de reële as, de y-as de imaginaire as en het xy-vlak het complexe vlak.

Je kunt $a + b\mathrm{j}$ ook opvatten als de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ met beginpunt $(0, 0)$ en eindpunt (a, b).

Optellen van vectoren gaat coördinaatsgewijs en dit past precies bij de optelling:

$$(a + b\mathrm{j}) + (c + d\mathrm{j}) \;=\; a + c + (b + d)\mathrm{j}.$$

In figuur 3.1 is de som $\alpha + \beta$ van de getallen $\alpha = 1 + 2\mathrm{j}$ en $\beta = 3 + \mathrm{j}$ weergegeven.



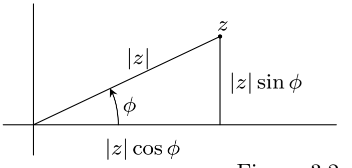
Figuur 3.1

De modulus van $\alpha = a + b\mathrm{j}$, genoteerd als $|\alpha|$, is gedefinieerd door $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Meetkundig is dit de lengte van de vector α.
Voor complexe getallen α en β geldt de regel:

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| \quad \text{en} \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

Een complex getal z ligt ook vast door (figuur 3.2):

- de modulus $|z|$ van de vector z
- de hoek ϕ tussen de reële as en de vector z



Figuur 3.2

Er geldt $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos\phi$ en $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin\phi$.
ϕ heet het argument van z, notatie $\arg z$. Het argument ligt vast op een 2π-voud na.
Complexe getallen z_1 en z_2 zijn dus gelijk als:

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{en} \quad \arg z_1 = \arg z_2 + k\cdot 2\pi \text{ voor een geheel getal } k$$

Voor '$\arg z_1 = \arg z_2 + k\cdot 2\pi$' zeg je ook 'op een 2π-voud na' of 'modulo 2π'.
Voor complexe getallen α en β geldt:

$$\arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta \quad \text{en} \quad \arg(\frac{\alpha}{\beta}) = \arg\alpha - \arg\beta$$

Daar moet je dan formeel bij opmerken 'modulo 2π', maar dat denk je er stilzwijgend bij. Je leest de regel als: 'Bij een product tel je de argumenten op, bij een quotiënt trek je ze van elkaar af'. Is het resultaat bijvoorbeeld $3\frac{1}{3}\pi$, dan maak je daar, indien nodig, $1\frac{1}{3}\pi$ of $-\frac{2}{3}\pi$ van.

Vaak kiezen we bij een eindresultaat $-\pi < \arg z \leq \pi$, dus $\arg(-1) = \pi$. Zo werkt dat ook bij de meeste rekenmachines in complexe modus.

We gebruiken ook de *complex geconjugeerde* of *toegevoegd complexe* van een complex getal. Voor $z = a + b\mathrm{j}$ is dat $a - b\mathrm{j}$. Je noteert deze als $\bar{z}$:

> Als $z = a + b\mathrm{j}$, dan is $\bar{z} = a - b\mathrm{j}$.

In het complexe vlak zijn z en $\bar{z}$ elkaars gespiegelde in de reële as.

Ze hebben dezelfde modulus ($|z| = |\bar{z}|$) en tegengestelde argumenten ($\arg\bar{z} = -\arg z$).

6.2 Lineaire differentiaalvergelijkingen als systemen

In deze paragraaf bekijken we lineaire tijdsinvariante systemen die worden gegeven door een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Een behandeling van dit type differentiaalvergelijkingen vind je in hoofdstuk 4 van deel 3 en in hoofdstuk 2 van deel 5.

Hier volstaan we met een korte inleiding aan de hand van de differentiaalvergelijking:

$$2y' + y = 10\sin t$$

Dit is een eerste-orde-differentiaalvergelijking (de hoogste afgeleide van y is de eerste afgeleide). De input is $10\sin t$ en de respons is oplossing $y(t)$.

De algemene vorm van dit type differentiaalvergelijking is:

$$ay' + by = f(t) \text{ met } a \neq 0$$

Is y_1 de respons op f_1 en y_2 de respons op f_2, dan geldt:

$$\begin{aligned} ay_1' + by_1 &= f_1 \\ ay_2' + by_2 &= f_2 \end{aligned}$$

Optellen van deze gelijkheden levert $ay_1' + ay_2' + by_1 + by_2 = f_1 + f_2$, dus:

$$a(y_1 + y_2)' + b(y_1 + y_2) = f_1 + f_2$$

Blijkbaar is $y_1 + y_2$ de respons op $f_1 + f_2$.

Net zo geldt: is y de respons op f, dan is αy de respons op αf.

Een lineaire differentiaalvergelijking specificeert dus een lineair systeem.

Deze eigenschap wordt gebruikt om dit type differentiaalvergelijking op te lossen, en wel in de volgende stappen:

1. Los eerst de vergelijking $ay' + by = 0$ op.
   Dat is eenvoudig: hieraan voldoet $y_0 = A\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ voor elke constante A (ga na!).
2. Zoek voor $ay' + by = f(t)$ *een* oplossing y_1.
   Dat is lastig, maar daar leren we technieken voor.
3. Dan is de algemene oplossing $y = y_0 + y_1$. De differentiaalvergelijking is opgelost.

Voor de differentiaalvergelijking $2y' + y = 10\sin t$ zien deze stappen er als volgt uit.

1. Los eerst de vergelijking $2y' + y = 0$ op.
   Dat is eenvoudig: de algemene oplossing is $y_0 = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

2. Zoek voor $2y' + y = 10\sin t$ *een* oplossing y_1.
   Dat is lastig, we doen het op de manier van deel 3 en proberen $y_1 = a\sin t + b\cos t$.
   Dan is $y_1' = a\cos t - b\sin t$, dus:

   $$2y_1' + y_1 = 2a\cos t - 2b\sin t \;+\; a\sin t + b\cos t = (a-2b)\sin t + (2a+b)\cos t$$

   $(a-2b)\sin t + (2a+b)\cos t = 10\sin t$ geeft $a - 2b = 10$ en $2a + b = 0$.
   Uit de laatste volgt $b = -2a$ en dat invullen in de eerste levert $5a = 10$, dus $a = 2$.
   Dan is $b = -4$ en dat levert $y_1 = 2\sin t - 4\cos t$.

3. Dan is de algemene oplossing $y = y_0 + y_1 = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 2\sin t - 4\cos t$.

Met deze stappen hebben we $y = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 2\sin t - 4\cos t$ als oplossing gevonden.
Het lastige hierbij is stap 2 en daarover gaan deze toepassingen.

De vergelijking $ay' + by = 0$ van stap 1 heet de bijbehorende *homogene* differentiaalvergelijking en de oplossing y_1 van stap 2 noemen we een *particuliere* oplossing.
Schematisch geef je de methode als volgt weer:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{algemene}\\ \text{oplossing}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{homogene}\\ \text{oplossing}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{particuliere}\\ \text{oplossing}\end{array}}$$

De homogene oplossing hoort bij input 0. In een elektrisch netwerk betekent dit dat je op de plaats van de voeding kortsluit. Dan ontladen de condensatoren van het netwerk zich en na enige tijd komt alles tot rust.
In het voorbeeld is de homogene oplossing $A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ en ook deze gaat naar 0 als t toeneemt. Bij toepassingen heet de homogene oplossing de *natuurlijke respons* van het systeem. In de praktijk sterft de natuurlijke respons meestal snel uit.

De particuliere oplossing heet de *gedwongen respons* van het systeem. Deze wordt veroorzaakt door een 'dwang' van buitenaf: de input. Je kunt het schema dus ook lezen als:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{totale}\\ \text{respons}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{natuurlijke}\\ \text{respons}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{l}\text{gedwongen}\\ \text{respons}\end{array}}$$

In het vervolg zijn we alleen in de gedwongen respons geïnteresseerd. We zullen deze gedwongen respons kortweg de respons noemen. Anders gezegd: het gaat ons in dit boek om de particuliere oplossing (stap 2 van het schema).

Het voorgaande geldt ook voor differentiaalvergelijkingen van hogere orde.

8 De Fourier-transformatie

8.1 De Fourier-transformatie $\mathcal{F}$

Bij een functie $f(t)$ hoort de spectrale dichtheid $\hat{f}(\omega)$ met $\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$.

De afbeelding $f(t) \to \hat{f}(\omega)$ geven we de naam *Fourier-transformatie*, die we noteren met $\mathcal{F}$. Dus:

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}, \text{ ook geschreven als } \mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\omega)$$

Of met een complete definitie:

$$\boxed{\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t}$$

De Fourier-transformatie is een afbeelding die aan een functie $f(t)$ de bijbehorende functie $\hat{f}(\omega)$ toevoegt.

Transformatie $\mathcal{F}$ is vergelijkbaar met Laplace-transformatie $\mathscr{L}$ uit deel 5. Bij de laatste wordt het beeld van $f(t)$ aangeduid met $F(s)$ en geldt $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$.

Afhankelijk van de situatie zullen we $\mathcal{F}(f)$ of $\hat{f}$ of beide gebruiken. En bij latere toepassingen wordt ook de hoofdletternotatie gebruikt, dus $F(\omega)$ in plaats van $\hat{f}(\omega)$.

Ten slotte kan $\mathcal{F}(f) = g$ worden genoteerd als:

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} g(\omega)$$

Zo wordt $\widehat{\Pi}(\omega) = \operatorname{sinc} \frac{1}{2}\omega$ genoteerd als $\mathcal{F}(\Pi(t)) = \operatorname{sinc} \frac{1}{2}\omega$ of als $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc} \frac{1}{2}\omega$.

Als er geen misverstand mogelijk is, schrijven we $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ ook als $\longrightarrow$ zonder de $\mathcal{F}$.

8.2 Basisregels van de Fourier-transformatie

Een belangrijke basisregel die we meestal stilzwijgend toepassen, is de *lineariteit* van de Fourier-transformatie:

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g) \ \text{ en } \ \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f) \text{ voor een constante } \lambda$$

In woorden: sommen gaan over in overeenkomstige sommen, en veelvouden gaan over in overeenkomstige veelvouden. De regel volgt uit het feit dat integreren lineair is:

$$\int_{-R}^{R} (f(t)+g(t))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^{R} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{en } \int_{-R}^{R} \lambda f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

De limiet voor $R \to \infty$ geeft $\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$ en $\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f)$.

8.2.1 De basisregels

De volgende regels zijn minder voor de hand liggend:

1.	$f(at)$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a>0)$	(tijdschaling)
2.	$f(-t)$	$\longrightarrow$	$\hat{f}(-\omega)$	(omkering)
3.	$f(t-t_0)$	$\longrightarrow$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\hat{f}(\omega)$	(tijdverschuiving)
4.	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}f(t)$	$\longrightarrow$	$\hat{f}(\omega-\omega_0)$	(frequentieverschuiving)
5.	$f'(t)$	$\longrightarrow$	$\mathrm{j}\omega\hat{f}(\omega)$	(tijdafgeleide)
6.	$tf(t)$	$\longrightarrow$	$\mathrm{j}\hat{f}'(\omega)$	(frequentieafgeleide)

Bij deze regels bestaan de nodige wiskundige voorwaarden. Zo kun je natuurlijk alleen over $f'(t)$ praten als f differentieerbaar is, op zijn minst stuksgewijs. En voor het bestaan van de Fourier-getransformeerde van $tf(t)$ is nodig dat $tf(t)$ absoluut integreerbaar is. De functies in de praktijk voldoen hieraan en als we vreemde resultaten tegenkomen, bekijken we de situatie in meer detail. Zolang de betrokken integralen bestaan en afgeleiden kunnen worden berekend, passen we de regels toe.

De respons op $\delta(t)$ wordt dus de impulsrespons van het systeem genoemd. Deze geven we aan met $h(t)$, dus:

$$\delta(t) \to h(t)$$

Het verband tussen de respons op een input $f(t)$ en de impulsrespons $h(t)$ blijkt een integraalvorm te zijn. Bij de afleiding daarvan wordt ook de zeefeigenschap van paragraaf 4.2 gebruikt, nu in de vorm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$$

De afleiding gaat als volgt, beginnend met $\delta(t) \to h(t)$:

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\;\to\; h(t) && \text{(gebruik tijdsinvariantie)}\\
\delta(t-\tau) &\;\to\; h(t-\tau) && \text{(gebruik lineariteit, veelvoud)}\\
f(\tau)\delta(t-\tau) &\;\to\; f(\tau)h(t-\tau) && \text{(gebruik lineariteit, integraal)}\\
\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau &\;\to\; \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau && \text{(gebruik de zeefeigenschap)}\\
f(t) &\;\to\; \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

De conclusie is:

De respons $y(t)$ op input $f(t)$ wordt gegeven door:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

met $h(t)$ de impulsrespons van het systeem.

Een integraal van deze vorm wordt de *convolutie* of het *convolutieproduct* van f en h genoemd. Deze convolutie wordt genoteerd als $f * h$, dus:

$$\boxed{(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

9.2 De convolutiestelling

In de vorige paragraaf is het convolutieproduct ingevoerd. Voor functies f en g is de definitie:

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

De *convolutiestelling* drukt uit dat een convolutie in het t-domein overeenkomt met een gewoon product van functies in het ω-domein. In formulevorm:

$$\boxed{\widehat{f * g}\,(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)}$$

Om dit aan te tonen, zetten we het product $\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ van de Fourier-getransformeerden van f en g over naar het tijddomein. Daarbij worden $\hat{f}(\omega)$ en $\hat{g}(\omega)$ in één formule gebruikt en daarom wordt in de integralen bij $\hat{f}$ in plaats van de letter t de letter u gebruikt en bij $\hat{g}$ in plaats van de letter t de letter v gebruikt. Dat levert de volgende berekening:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega u}\,\mathrm{d}u \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(v) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega v}\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega u}\,\mathrm{d}u \right) g(v) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega v}\,\mathrm{d}v && \text{schrijf als dubbelintegraal} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(v) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v && \text{verwissel integratievolgorde} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(v) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(u+v)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u && \text{substitueer } v = t-u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u && \text{verwissel integratievolgorde} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \text{de Fourier-getransformeerde van } \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t-u)\,\mathrm{d}u \\
&= \text{de Fourier-getransformeerde van } (f * g)(t) \\
&= \widehat{f * g}\,(\omega)
\end{aligned}$$

Je kunt de convolutiestelling ook beschrijven met:

$$\boxed{\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)}$$

of met:

$$\boxed{(f*g)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)}$$

En het maalteken wordt soms ook weggelaten.

In paragraaf 9.1 is aangetoond dat de respons $y(t)$ op $f(t)$ gelijk is aan $(f*h)(t)$ met h de impulsrespons. Dit speelt in het tijddomein.

De convolutiestelling zegt dat $\widehat{f*h}$ gelijk aan $\hat{f}(\omega)\cdot\hat{h}(\omega)$. Dus $f*h = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)\cdot\hat{h}(\omega))$.

Zie het schema hiernaast.

$$\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, "f(t)*h(t)"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & y(t) \\
\hat{f}(\omega) \arrow[r, "\hat{f}(\omega)\cdot\hat{h}(\omega)"] & \hat{y}(\omega) \arrow[u, "\mathcal{F}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Een LTI-systeem heeft impulsrespons $h(t)$.

Voor de respons y op input f geldt dan:

in het t-domein: $y(t) = f(t) * h(t)$

in het ω-domein: $\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega)\cdot\hat{h}(\omega)$

De convolutiestelling geeft rechtstreeks (en eenvoudig) het effect van een LTI-systeem op de frequenties van de input.

Dit schema toont de kracht van het werken in het frequentiedomein: het bepalen van de respons is in het frequentiedomein een eenvoudige vermenigvuldiging.

Net als bij de Laplace-transformatie wordt de impulsrespons $\hat{h}(\omega)$ meestal als $H(\omega)$ geschreven (net als in hoofdstuk 6 van dit boek).

$H(\omega)$ heet de *systeemfunctie* of *overdrachtsfunctie* van het systeem.

Bij het rekenen met LTI-systemen worden Fourier-getransformeerden ook met een hoofdletter genoteerd, dus $Y(\omega)$ in plaats van $\hat{y}(\omega)$ en $F(\omega)$ in plaats van $\hat{f}(\omega)$.

Bij systeemfunctie $H(\omega)$ is de respons op input $F(\omega)$ gelijk aan $F(\omega)\cdot H(\omega)$.

Ken je de overdrachtsfunctie, dan weet je direct wat het systeem met de frequenties van de input doet.