Wiskunde voor bachelor en master

Deel 5 De Laplace-transformatie met toepasingen

Uitwerkingen

Anne Kaldewaij

2021, Syntax Media, Utrecht

Inhoud

$$\frac{A(s^2+1)+Bs(s-2)+C(s-2)}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{(A+B)s^2+(-2B+C)s+A-2C}{(s-2)(s^2+1)}$$

Dit levert $A+B=0$, $-2B+C=50$ en $A-2C=0$.

Uit $A+B=0$ volgt $A=-B$ en uit $A-2C=0$ volgt $A=2C$, dus is $-B=2C$.

Dit invullen in $-2B+C=50$ geeft $5C=50$, dus $C=10$.

Daaruit volgt $B=-2C=-20$ en $A=-B=20$. Het resultaat is:

$$Y = \frac{20}{s-2} - \frac{20s}{s^2+1} + \frac{10}{s^2+1}$$

Dus $y = 20\mathrm{e}^{2t} - 20\cos t + 10\sin t$.

3.b. $\begin{cases} y' - 2y = 50\cos t \\ y(0) = 10 \end{cases}$

Toepassen van de Laplace-transformatie geeft $sY - 10 - 2Y = \dfrac{50s}{s^2+1}$.

Dus $(s-2)Y = 10 + \dfrac{50s}{s^2+1}$ en dan is $Y = \dfrac{10}{s-2} + \dfrac{50s}{(s-2)(s^2+1)}$.

De breuksplitsing uit onderdeel 3.a. geeft:

$$Y = \frac{10}{s-2} + \frac{20}{s-2} - \frac{20s}{s^2+1} + \frac{10}{s^2+1} = \frac{30}{s-2} - \frac{20s}{s^2+1} + \frac{10}{s^2+1}$$

Dus $y = 30\mathrm{e}^{2t} - 20\cos t + 10\sin t$.

4.a. Voor de temperatuur $y(t)$ geldt $\begin{cases} y' = -0{,}4(y-20) \\ y(0) = 100 \end{cases}$.

Breng dit in de standaardnotatie $ay' + by = f(t)$, dan krijg je:

$$\begin{cases} y' + 0{,}4y = 5 \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

4.b. De Laplace-transformatie geeft $sY - 100 + 0{,}4Y = \dfrac{5}{s}$, dus $Y(s+0{,}4) = 100 + \dfrac{5}{s}$.

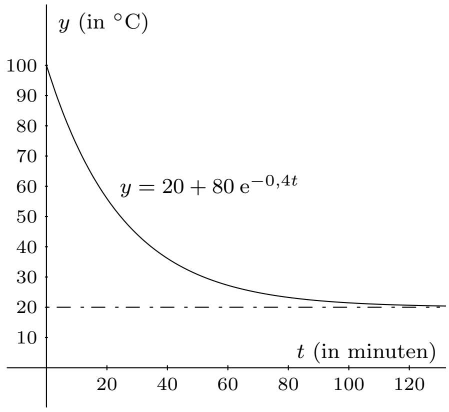
Dan is $Y = \dfrac{100}{s+0{,}4} + \dfrac{5}{s(s+0{,}4)} = \dfrac{100s+5}{s(s+0{,}4)}$.

Uit $\dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+0{,}4} = \dfrac{A(s+0{,}4)+Bs}{s(s+0{,}4)} = \dfrac{(A+B)s+0{,}4A}{s(s+0{,}4)}$ volgt bij breuksplitsen

$A+B=100$ en $0{,}4A=5$, dus $A=20$ en $B=80$, dus $Y = \dfrac{20}{s} + \dfrac{80}{s+0{,}4}$.

Hieruit volgt de oplossing $y = 20 + 80\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

4.c. De grafiek van $y = 20 + 80\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$ is hiernaast weergegeven.



2.3.3 Opgaven

1.a. $\dfrac{1}{s^2-4} = \dfrac{1}{(s-2)(s+2)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s+2}$ geeft voor de tellers:

$$1 = A(s+2) + B(s-2)$$

$s = 2$ geeft $1 = 4A$, dus $A = \frac{1}{4}$.
$s = -2$ geeft $1 = -4B$, dus $B = -\frac{1}{4}$.
Hieruit volgt:

$$\frac{1}{s^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right)$$

Terugtransformeren geeft $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})$.

1.b. $\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3} = \dfrac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{s+1}$ geeft voor de tellers:

$$3s+7 = A(s+1) + B(s-3)$$

$s = 3$ geeft $16 = 4A$, dus $A = 4$.
$s = -1$ geeft $4 = -4B$, dus $B = -1$.
Hieruit volgt:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}$$

Terugtransformeren geeft $4\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}$.

3.2.1 Opgaven

1.a. Lees $y'' + y = t^2$ als $1y'' + 0y' + 1y = t^2$.
De bijbehorende systeemfunctie is $H(s) = \dfrac{1}{1s^2 + 0s + 1} = \dfrac{1}{s^2+1}$.
(De overige onderdelen gaan precies zo.)

1.b. $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-t}$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s+2}$.

1.c. $y'' = \sin 2t$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

1.d. $y'' + 2y' = t - \cos t$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s}$.

1.e. $y' = t^2$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s}$.

1.f. $y = t^2$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{1}$, dus $H(s) = 1$.

2.a. $y'' - y = f(t)$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s^2-1} = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)}$.

2.b. Voor $f(t) = 1$ geldt $F(s) = \dfrac{1}{s}$.

Dus voor de respons y geldt $Y(s) = F(s)\cdot H(s) = \dfrac{1}{s(s-1)(s+1)}$.

Breuksplitsen als $\dfrac{1}{s(s-1)(s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s+1}$ geeft voor de teller:

$$1 = A(s-1)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s-1)$$

$s = 0 \;\Rightarrow\; -A = 1$, dus $A = -1$
$s = 1 \;\Rightarrow\; 2B = 1$, dus $B = \frac{1}{2}$
$s = -1 \;\Rightarrow\; 2C = 1$, dus $C = \frac{1}{2}$
Dit levert $Y = -\dfrac{1}{s} + \dfrac{\frac{1}{2}}{s-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}$, dus $y = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$.

2.c. Voor $f(t) = 4\mathrm{e}^t$ geldt $F(s) = \dfrac{4}{s-1}$, dus $Y = F(s)H(s) = \dfrac{4}{(s-1)^2(s+1)}$.
Breuksplitsen als $\dfrac{4}{(s-1)^2(s+1)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{(s-1)^2} + \dfrac{C}{s+1}$ geeft voor de teller:

$$4 = A(s-1)(s+1) + B(s+1) + C(s-1)^2$$

$s = 1 \;\Rightarrow\; 2B = 4$, dus $B = 2$

$s = -1 \;\Rightarrow\; 4C = 4$, dus $C = 1$

$s = 0 \;\Rightarrow\; -A + B + C = 4$, dus $A = B + C - 4 = -1$

Dit levert $Y = -\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{s+1}$.

Dus $y = -\mathrm{e}^t + 2t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} = (2t-1)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}$.

3.a. $y'' + y = f(t)$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$.

3.b. Voor $f(t) = 1$ geldt $F(s) = \dfrac{1}{s}$.

Dus voor de respons y geldt $Y(s) = F(s)H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

Breuksplitsen als $\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2+1} + \dfrac{Cs}{s^2+1}$ geeft voor de teller:

$$1 = A(s^2+1) + Bs + Cs^2, \text{ dus } (A+C)s^2 + Bs + A = 1$$

Daaruit volgt $A = 1$, $B = 0$ en $A + C = 0$, dus $C = -1$.

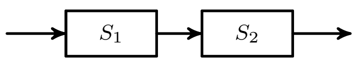
Dit levert $Y = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$, dus $y = 1 - \cos t$.

3.c. Voor $f(t) = \cos t$ geldt $F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$.

Dus voor de respons y geldt $Y(s) = F(s)H(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$.

Dit levert $y = \frac{1}{2}t\sin t$.

4.a. S_1 hoort bij $y' - y = f(t)$, dus $H_1(s) = \dfrac{1}{s-1}$.



4.b. S_2 hoort bij $y' + y = f(t)$, dus $H_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$.

4.c. S is de serieschakeling van S_1 en S_2.

Dan is $H(s) = H_1(s)H_2(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)}$.

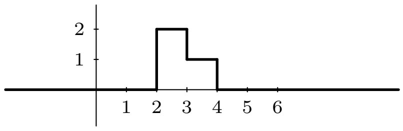
4.d. Voor de respons y van S_1 op $f(t) = 1$ geldt $Y = F(s)H_1(s) = \dfrac{1}{s(s-1)}$.

Breuksplitsen levert $Y = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s}$, dus $y = \mathrm{e}^t - 1$.

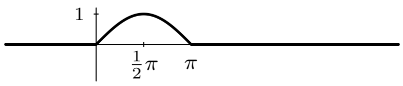
Uitwerkingen hoofdstuk 5

5.2.3 Opgaven

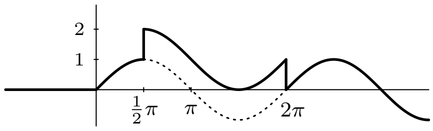
1.a. $y = 2u(t-2) - u(t-3) - u(t-4)$



1.b. $y = u(t)\sin(t) + u(t-\pi)\sin(t-\pi)$
$\quad = u(t)\sin(t) - u(t-\pi)\sin(t)$



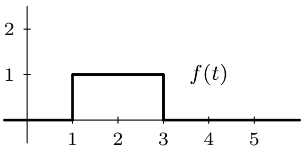
1.c. $y = u(t)\sin(t) + u(t - \frac{1}{2}\pi) - u(t - 2\pi)$



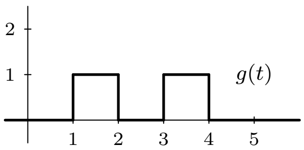
2.a. Figuur 5.11 toont de grafiek van $f(t) = u(t-1) - u(t-3)$.
Op $t = 1$ één stap omhoog en op $t = 3$ één stap omlaag.

2.b. Figuur 5.12 toont de grafiek van $g(t) = u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) - u(t-4)$.

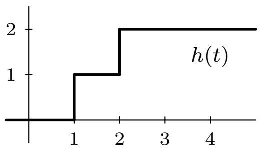
2.c. Figuur 5.13 toont de grafiek van $h(t) = u(t-1) + u(t-2)$.



Figuur 5.11



Figuur 5.12



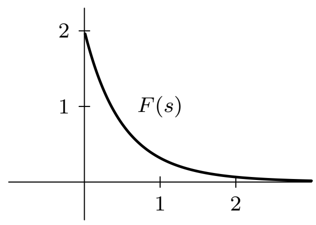
Figuur 5.13

3.a. $f(t) = u(t-1) - u(t-3) \;\Rightarrow\; F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s} - \dfrac{e^{-3s}}{s} = \dfrac{e^{-s} - e^{-3s}}{s}$

Je kunt dit ook schrijven als $F(s) = e^{-3s}\left(\dfrac{e^{2s}-1}{s}\right)$.

Uit de Taylorreeks van e^x (deel 2, paragraaf 4.5) volgt:

$$\frac{e^{2s}-1}{s} \approx \frac{1+2s-1}{s} \approx 2 \text{ voor } s \text{ klein}$$



Dus in de buurt van 0 is $F(s) \approx e^0 \cdot 2 = 2$.
De grafiek van $F(s)$ staat hiernaast getekend.
Deze grafiek vind je ook met een grafische rekenmachine of met het pakket Geogebra.

3.b. $g(t) = u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) - u(t-4)$ heeft als Laplace-getransformeerde:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} = \frac{e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$$

3.c. $h(t) = u(t-1) + u(t-2)$ heeft als Laplace-getransformeerde:

$$H(s) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{e^{-s} + e^{-2s}}{s}$$

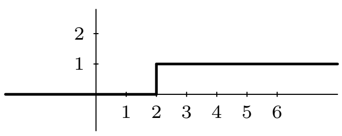
(De grafiek hiervan heeft voor $s = 0$ een verticale asymptoot.)

4.a. $\mathscr{L}(e^{-t}) = \dfrac{1}{s+1}$ (standaardfunctie)

4.b. Pas starten van dit signaal op tijdstip $t = 1$ geeft het signaal $u(t-1)e^{-(t-1)}$ met Laplace-getransformeerde $\dfrac{e^{-s}}{s+1}$.

5.a. $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s}$, dan is $f(t) = u(t-2)$, dus:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 2 \\ 1 & \text{als } t > 2 \end{cases}$$



Uitwerkingen hoofdstuk 7

7.1.1 Opgaven

1.a. De respons op $f(t)$ is $y(t) = (f * h)(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

In dit geval is $h(t) = \mathrm{e}^t$ en $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Dan is $f(\tau)h(t-\tau) = \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{t-\tau} = \mathrm{e}^{t-2\tau}$.
Dit levert de volgende berekening:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{t-2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^t\left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\tau}\right]_{\tau=0}^t = \mathrm{e}^t(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^t = \tfrac{1}{2}(e^t - \mathrm{e}^{-t}) \end{aligned}$$

Dus de respons op e^{-t} is $\frac{1}{2}(e^t - \mathrm{e}^{-t})$.

1.b. Voor de respons $y(t)$ op e^t vind je op dezelfde manier:

$$y(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^t\int_0^t 1\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^t\left[\,\tau\,\right]_{\tau=0}^t = \mathrm{e}^t(t-0) = t\mathrm{e}^t$$

Dus de respons op e^t is $t\mathrm{e}^t$.

2.a. $t*t = \int_0^t \tau\cdot(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t t\tau - \tau^2\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{1}{2}t\tau^2 - \frac{1}{3}\tau^3\right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{6}t^3$

2.b. $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-3t} * \mathrm{e}^{-2t} &= \int_0^t \mathrm{e}^{-3\tau}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{-3\tau}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-2t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-2t}\left[\,-\mathrm{e}^{-\tau}\,\right]_{\tau=0}^t = \mathrm{e}^{-2t}(-\mathrm{e}^{-t}+1) = -\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} \end{aligned}$$

2.c. $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2t} * \mathrm{e}^{-3t} &= \int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{e}^{3\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-3t}\int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-3t}\left[\,\mathrm{e}^{\tau}\,\right]_{\tau=0}^t = \mathrm{e}^{-3t}(\mathrm{e}^t - 1) = \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} \end{aligned}$$

Merk op dat uit 2.b. en 2.c. volgt $\mathrm{e}^{-3t} * \mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t} * \mathrm{e}^{-3t}$, terwijl de berekeningen heel verschillend zijn.
In paragraaf 7.3 wordt aangetoond dat $f*g = g*f$ voor alle functies f en g.

2.d. $\mathrm{e}^{-2t} * \mathrm{e}^{-2t} = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{2\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-2t}\int\limits_0^t 1\,\mathrm{d}\tau$

$= \mathrm{e}^{-2t}\left[\,\tau\,\right]_{\tau=0}^{t} = t\mathrm{e}^{-2t}$

3.a. Bij $y'' + y = f(t)$ hoort systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ en dus $h(t) = \sin t$.

3.b. $u(t) * h(t) = \int\limits_0^t 1\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[\,\cos(t-\tau)\,\right]_{\tau=0}^{t} = \cos(0) - \cos(t) = 1 - \cos t$

3.c. De Laplace-getransformeerde van $f(t) = u(t)$ is $F(s) = \dfrac{1}{s}$.

De respons in het s-domein is $F(s)H(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

De breuksplitsing $\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2+1} + \dfrac{Cs}{s^2+1}$ geeft voor de tellers:

$1 = A(s^2+1) + Bs + Cs^2$, dus $(A+C)s^2 + Bs + A = 1$

Daaruit volgt $A = 1$, $B = 0$ en $C = -1$. Dus $\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$.

De inverse Laplace-getransformeerde geeft $1 - \cos t$ als respons in het t-domein.

7.3.1 Opgaven

1.a. $y'' - y = f(t)$ heeft systeemfunctie $H(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$.

1.b. Breuksplitsen levert $H(s) = \dfrac{1}{s^2-1} = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{s-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{s+1}$.

Dus $h(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$.

1.c. De respons $g(t)$ op $u(t)$ is:

$u(t) * h(t) = \int\limits_0^t 1\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{t-\tau} - \mathrm{e}^{-t+\tau})\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left[\,-\mathrm{e}^{t-\tau} - \mathrm{e}^{-t+\tau}\,\right]_{\tau=0}^{t} =$

$= \frac{1}{2}((-1-1) - (-\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})) = -1 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$

1.d. $g(t) = -1 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) \Rightarrow g'(t) = 0 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) = h(t)$

Uitwerkingen hoofdstuk 8

8.2.3 Opgaven

1.a. Voor S_1 geldt $H_1(s) = \dfrac{1}{2s-1}$ en daarbij hoort $2y' - y = f(t)$.

Voor S_2 geldt $H_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$ en daarbij hoort $y' + y = f(t)$.

1.b. $H_1(s) = \dfrac{1}{2s-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{s-\frac{1}{2}}$, dus impulsrespons $h_1(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}$.

$H_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$, dus impulsrespons $h_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

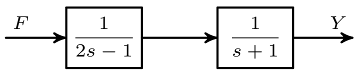
1.c. Je kunt de eenstapsrespons $g(t)$ berekenen door het terugtransformeren van $\dfrac{1}{s}H(s)$, of door het berekenen van $\int\limits_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

We kiezen voor het laatste, omdat in dit geval het primitiveren eenvoudig is.

Voor S_1 is de staprespons $g_1(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\tau}\right]_0^t = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - 1$.

Voor S_2 is de staprespons $g_2(t) = \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[-\mathrm{e}^{-\tau}\right]_0^t = -\mathrm{e}^{-t} - (-1) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.

1.d. In serie schakelen levert het schema:



Hierbij hoort de overdrachtsfunctie $H(s) = \dfrac{1}{2s-1}\cdot\dfrac{1}{s+1} = \dfrac{1}{(2s-1)(s+1)}$.

Voor de eenstapsrespons $g(t)$ geldt $G(s) = \dfrac{1}{s}H(s) = \dfrac{1}{s(2s-1)(s+1)}$.

Breuksplitsen: $\dfrac{1}{s(2s-1)(s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{2s-1}$ geeft voor de tellers:

$$1 = A(s+1)(2s-1) + Bs(2s-1) + Cs(s+1)$$

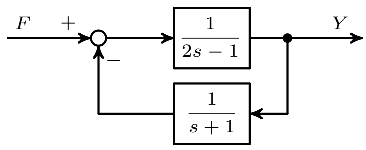
$s = 0$ geeft $A = -1$, $s = -1$ geeft $B = \frac{1}{3}$, en $s = \frac{1}{2}$ geeft $C = \frac{4}{3}$.

Dus $G(s) = -\dfrac{1}{s} + \dfrac{\frac{1}{3}}{s+1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{s-\frac{1}{2}}$ en dan is $g(t) = -1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}$.

1.e. Bij de parallelschakeling geldt $H(s) = H_1(s) + H_2(s) = \dfrac{1}{2s-1} + \dfrac{1}{s+1}$.

1.f. De eenstapsrespons $g(t) = g_1(t) + g_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - 1 + 1 - \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - \mathrm{e}^{-t}$.

2.a. Voor het teruggekoppelde systeem geldt:



$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{2s-1}}{1 + \dfrac{1}{s+1} \cdot \dfrac{1}{2s-1}}$$

Vermenigvuldig teller en noemer met $(s+1)(2s-1)$, dan krijg je:

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)(2s-1)+1} = \frac{s+1}{2s^2+s-1+1} = \frac{s+1}{2s^2+s} = \frac{s+1}{s(2s+1)}$$

2.b. Breuksplitsen geeft $\dfrac{s+1}{s(2s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{2s+1}$ met tellers $s+1 = A(2s+1) + Bs$.

$s = 0$ geeft $0 + 1 = A$, dus $A = 1$.

$s = -\frac{1}{2}$ geeft $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}B$, dus $B = -1$.

Dus geldt $H(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2s+1} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}$. De pulsrespons is $h(t) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

2.c. De eenstapsrespons $g(t) = \int\limits_0^t 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[\tau + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\right]_0^t = t + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - 1$.

Het kan ook met breuksplitsen, dat geeft $\dfrac{s+1}{s^2(2s+1)} = \dfrac{-1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{2s+1}$.

2.d. Verwissel je de systemen, dan verandert de noemer van $H(s)$ niet. Je krijgt:

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{s+1}}{1 + \dfrac{1}{2s-1} \cdot \dfrac{1}{s+1}} = \frac{2s-1}{s(2s+1)}$$

De breuksplitsing wordt $\dfrac{2s-1}{s(2s+1)} = \dfrac{-1}{s} + \dfrac{4}{2s+1} = \dfrac{-1}{s} + \dfrac{2}{s+\frac{1}{2}}$.

Dus $h(t) = -1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

De eenstapsrespons $g(t) = \int\limits_0^t -1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[-\tau - 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\right]_0^t = -t - 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 4$.