Wiskunde A, B, C en D op vwo-niveau

Algebra-analyse-meetkunde-statistiek-kansrekening vectoralgebra-grafen-matrices-rijen-reeksen dynamische modellen-logica-perspectief-Lorentzfactor-Poissonverdeling-complexe getallen

Over dit boek

Ook deze derde druk van *'Wiskunde A,B,C en D op vwo-niveau'* behandelt alle hoofdonderdelen van de wiskunde van het huidige vwo. Het is speciaal bedoeld voor hun studenten die zich degelijk willen voorbereiden op het examen, of op een academische studie, maar zeker ook voor allen die hun wiskundekennis willen opfrissen en/of uitbreiden met voor hen onbekende, minder bekende, of vergeten. onderwerpen. De geheel uitgewerkte opgaven en toepassingen zijn hoofdzakelijk bedoeld ter ondersteuning van de direct eraan voorafgaande theorie en zijn zo beperkt mogelijk gehouden. Vooral daardoor kunt u zich in betrekkelijk korte tijd veel stof (weer) eigen maken en raakt u niet gedemotiveerd omdat 'het allemaal niet opschiet' vanwege de schier eindeloze series opgaven zoals die, natuurlijk terecht, in alle bestaande methoden en lesboeken voorkomen. *'Wiskunde Leren, is wiskunde doen'* was immers het motto van Carl Friedrich Gauss, het wonderkind, de *'Mozart van de Wiskunde*', maar dit boek is eerder 'naslagwerk en uitgebreid vademecum', dan 'leer- en sommenboek'. Alle onderdelen: functies, vergelijkingen, planimetrie, stereometrie, kansrekening, differentiaalrekening, …, complexe getallen, worden steeds op *eind vwo-niveau als compleet geheel* behandeld, dus niet volgens de concentrische- en structurele opbouw van alle bekende wiskundemethoden, waarbij die onderwerpen in de opvolgende leerjaren herhaald en uitgebreid worden volgens het beproefd pedagogisch- didactische model van prof. Herbarts. Het boek is duidelijk gerubriceerd middels een zeer gedetailleerde inhoudsopgave en trefwoordenregister, waardoor u snel de voor u meest interessante onderwerpen kunt terugvinden. De duidelijke en exacte bewijzen van wetten, stellingen en algoritmen zijn zeker van belang voor een goed begrip van het behandelde onderwerp, maar ook met name bedoeld als '*sommentraining*' in het door u zelf oplossen van wiskundige opgaven. Aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GR), die mede onmisbaar werd in de wiskunde, door het veranderde niveau van bijvoorbeeld vergelijkingen, logaritmen, goniometrie, kansrekening, economie,.. wordt in dit boek, geïntegreerd in de opgaven en toepassingen, alle nodige aandacht besteed. Wij kozen al eerder voor de TI-83 van 'Texas Instruments', vrijwel identiek met de nieuwere, soms iets handiger, TI-84. De GR van 'Casio' is overigens naar mijn idee minstens even goed bruikbaar.

Over de auteur:

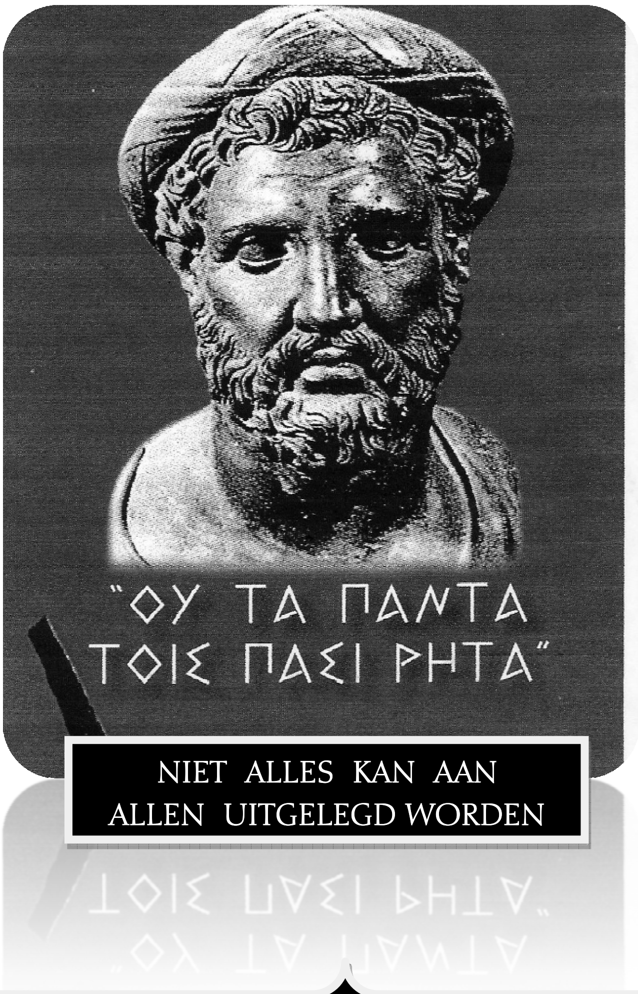
Wim Gronloh, begon zijn loopbaan als scheepswerktuigkundige bij de Nederlandse Koopvaardij. Was daarna ruim 35 jaar werkzaam als leraar wis- en natuurkunde. sinds 1988 ook informatica. Publiceerde in 1998 de wiskundemethode 'Basislijn' voor het lbo/mavo en HAVO/vwo en schrijft sedert 2006 wiskundeboeken voor vwo en HAVO.

Bij deze derde druk:

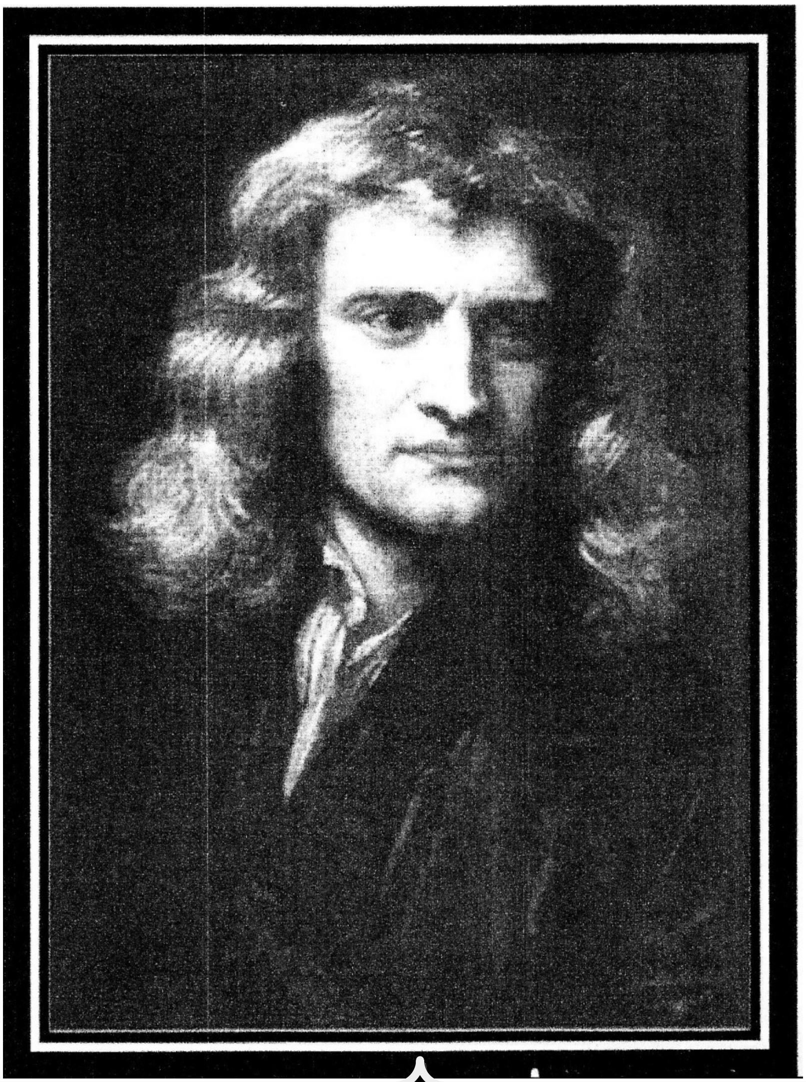
'Wiskunde *A,B,C* en *D* op vwo-niveau' omvat hoofdzakelijk de stof van de vorige druk, maar is een complete herziening daarvan. Behalve verheldering van teksten en verduidelijking van sommige figuren, hebben nieuwere opgaven de oudere vervangen, onder meer door de veranderende trend van het schoolwiskunde-programma en van de wiskunde-examens.

Ik hoop dat deze uitgave aan uw verwachtingen zal mogen voldoen en houd me voor opbouwende kritiek zeker aanbevolen.

Wim Gronloh
e-mail: wimgronloh@kpnplanet.nl
Bussum, december 2020



Pythagoras, geboren op Samos (eiland in de Egeïsche Zee) circa 572 jaar v. Chr. Richtte omstreeks 530 jr. v. Chr. in Croton de school van de Pythagoreeërs op. Zij bewezen de beroemdste stelling uit de klassieke wiskunde: In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de twee rechthoekszijden. De Babyloniërs kenden de eigenschap al ca. 1000 jr. v. Chr. De Egyptische 'harpedonaptai' (touwspanners) pasten de stelling ca. 3000 jr. v. Chr. toe om rechte hoeken uit te zetten via knopentouwen (knopen op afstanden 3-4-5; 5-12-13; 8-15-17,.. (de later zogenoemde 'Pythagoras-triples').

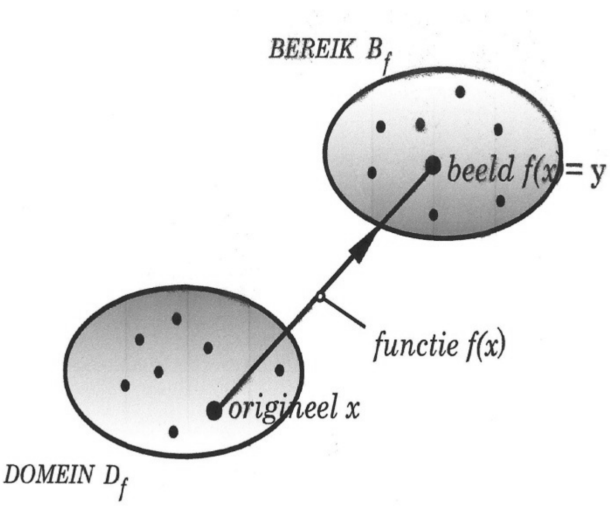


Sir Isaac Newton, geboren in 1642 te Woolsthorp, overleden in 1727 te Kensington. Engels wis- en natuurkundige, astronoom, nauurfilosoof, alchemist, officieel muntmeester en theoloog. Publiceerde de differentiaal- en integraalrekening in zijn meesterwerk 'Principia' in 1687 betreffende zwaartekracht, banen van hemellichamen, grondwetten van de dynamica, .. De Britse 'Royal Society' beschouwde Newton in 2005 als de grootste geleerde van de wetenschap ooit.

I. FUNCTIES, GRAFIEKEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN

Als je rustig wandelend per uur 4 *km* aflegt dan is de afgelegde afstand in 2½ *uur* dus 10 *km*. De lengte van de afgelegde weg *bij die snelheid* is afhankelijk van de *tijd* ofwel: de afstand is een ***functie*** van de tijd. Zo bestaan er talrijke grootheden die afhankelijk zijn van *één of meer* andere grootheden waarbij het verband tussen die grootheden in een functie is vastgelegd via een zeker ***functievoorschrift***.
Als je in bovenstaand geval ook rekening wilt houden met een *wisselende snelheid*, dan is de lengte van de afgelegde weg een functie van *de tijd en de gemiddelde snelheid*.

1. *Het begrip functie*



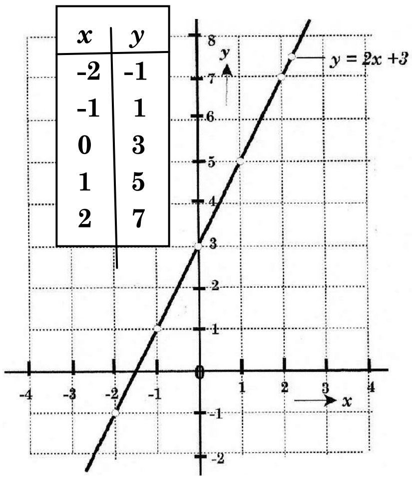
Is bijvoorbeeld een functie *f* *gegeven door* het *functievoorschrift:*
'vermenigvuldig met drie' dan is $f(3) = 9$,
$f(-7) = -21$ en $f(a) = 3a$.
De functie zelf wordt dan geschreven als:
$\boldsymbol{f(x) = 3.\,x}$ of korter $\boldsymbol{y = 3\,x}$
De getallen 3, −7 en a in dit voorbeeld heten ***originelen*** van de functie $f(x) = 3\,x$, de getallen 9, −21 en $3a$ zijn dan de bijbehorende ***beelden*** van die functie.
De verzameling *originelen* van *f* heet het ***domein*** $\boldsymbol{D_f}$ van de functie, de verzameling *beelden* heet het ***bereik*** $\boldsymbol{B_f}$.

Als *geen speciaal domein of bereik is aangegeven*, wordt er van uitgegaan dat *alle originelen* (van het domein) en *alle beelden* (van het bereik) elementen zijn van de ***verzameling reële getallen*** $\mathbb{R}$.

> *Een functie van x is in het algemeen een zeker voorschrift f, (g, h, i, …) dat bij elke veranderlijke x uit het domein D_f, precies één element f(x) = y uit het bereik B_f bepaalt*

Vaak worden origineel x en beeld y van een functie getekend als punten $P(x,y)$ van een grafiek in een rechthoekig coördinatenstelsel:
Het *origineel x op de x-as*, het beeld $y = f(x)$ op de y-as.
In bijgaande figuur is vanuit de x-y -tabel de grafiek getekend van de functie: $\boldsymbol{f(x) = y = 2\,x + 3}$.

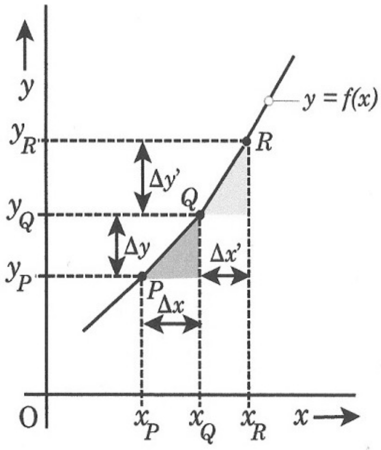
In het algemeen kunnen we met '*de functie* $f(x)$' zowel de ***grafiek van f(x)*** als de ***functie f(x)*** *zelf bedoelen, tenzij het expliciet over de grafiek van de functie gaat.*



x	y
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7

2. *Lineaire functies*

Voor *elk tweetal punten P en Q* van een *lineaire functie* geldt dat de ***verhouding*** tussen een zekere toename $\Delta x = x_Q - x_P$ van x en de *bijbehorende* toename $\Delta y = y_Q - y_P$ van y steeds een ***vaste waarde*** heeft.
De betekenis hiervan is als volgt:



Stel P en Q zijn twee naburige punten op de grafiek van een lineaire functie $y = f(x)$ waarbij $P = (x_P, y_P)$ en $Q = (x_Q, y_Q)$.
De *verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bepaalt de *hoek* die het *lijnstukje PQ* maakt met de *positieve x* -as, dus bepaalt de *richting van PQ*.
Stel R (x_R, y_R) is *een ander* naburig punt van Q op de grafiek met $x_R = x_Q + \Delta x'$ en $y_R = y_Q + \Delta y'$, dan wordt de richting van QR bepaald door de verhouding $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$
Omdat *per definitie* de verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bij een lineaire functie een vaste waarde heeft, geldt dan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ dus zijn de *richtingen* van de lijnstukjes *gelijk* ofwel:
PQ en QR liggen in elkaars verlengde dus ook: ***P, Q en R liggen op een rechte lijn***

Daar P, Q en R willekeurig gekozen naburig punten zijn, geldt dit voor alle punten van de grafiek. De grafiek van een ***lineaire*** functie is dus een ***rechte lijn***. (dit verklaart de naam *lineaire functie).* De *constante verhouding* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$ bepaalt de *richting van lijn l* en noemt men daarom de ***richtingscoëfficiënt a*** van *l*.

De *vergelijking* van lijn *l*, dus de betrekking tussen de waarden *x* en *y waaraan alle punten P (x,y) van lijn l voldoen* vind je nu als volgt:

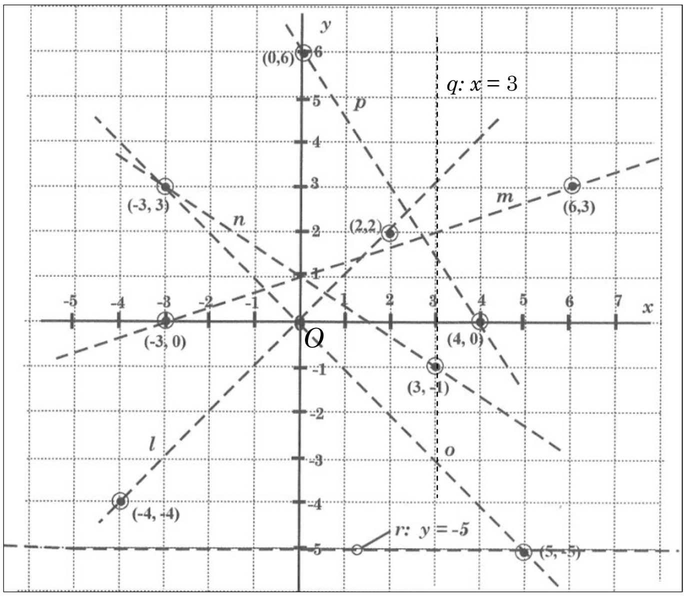
Voor de lijn *l* tussen twee willekeurige punten $P\ (x_p, y_p)$ en $Q\ (x_q, y_q)$ geldt volgens voorgaande dat de *richtingscoëfficiënt* $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$ $(x_q - x_p \neq 0)$ . ..(1)
Ga ervan uit dat *l niet evenwijdig is met de y-as* , dus $\boldsymbol{x_q - x_p \neq 0}$ en dat $P\ (x_p, y_p) = \boldsymbol{(0, b)}$ het snijpunt is van *l* met de *y*-as, dus $\boldsymbol{x_p = 0}$ en $\boldsymbol{y_p = b}$ …(2)
Voor $Q\ (x_q, y_q)$ kiezen we een willekeurig punt $\boldsymbol{Q\ (x, y)}$, dus $\boldsymbol{x_q = x}$ **en** $\boldsymbol{y_q = y}$ …(3)
(2) en (3) in (1) ingevuld geeft: $\boldsymbol{a} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{y-b}{x-0} = \frac{\boldsymbol{y-b}}{\boldsymbol{x}}$, dus $\boldsymbol{ax = y - b}$ ofwel $y = ax + b$
De betrekking $\boldsymbol{y = ax + b}$ heet nu *de vergelijking van l.*

(Als *l* // *y-as dan is bij elke y* : $\boldsymbol{x_p = x_q}$ dus $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$ bestaat dan niet omdat $x_q - x_p = 0$
Bij elke *y* is dan $x = x_p = x_q$ dus is $\boldsymbol{x = x_p}$ $(= \boldsymbol{x_q})$ de vergelijking van *l* als *l* // *y-as*)

De grafiek van een lineaire functie is een (rechte) lijn l met vergelijking y = ax + b
waarin a de richtingscoëfficiënt is van l en b de y-coördinaat is
van het snijpunt van l met de y-as.

Toepassingen:

1. In deze figuur zijn de lijnen *l, m, n, o en p* getekend door twee gegeven punten in een *orthonormaal coördinatenstelsel XOY*. Een orthonormaal stelsel bestaat uit twee onderling loodrechte coördinaten-assen: de *X*-as = 'abscis' en de *Y*-as = 'ordinaat', met oorsprong *O* als hun snijpunt.
De eenheden op de assen hebben daarbij de standaardlengte 1 .



a. Bepaal van elke lijn de vergelijking
b. Bepaal ook de vergelijking van de X-as en de Y-as.
c. Hoe lopen de lijnen *q*: $x = 3$ en *r*: $y = -5$?

a. De grafiek van een lineaire functie is een lijn *l* met vergelijking *l*: $y = ax + b$, waarin $\boldsymbol{a}$ de *richtingscoëfficiënt* is van *l en b* de *y*-coördinaat van het snijpunt van *l* met de *y*-as.
Op elke lijn zijn steeds twee *roosterpunten* (punten in het snijpunt van twee roosterlijnen) met een cirkeltje aangegeven waarmee de vergelijking is te bepalen.

- Zo is van lijn *l*: $\boldsymbol{a} = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \dfrac{2-(-4)}{2-(-4)} = \mathbf{1}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ want ook O (0,0) ligt op lijnstuk (-4,4).(2,2).
dus de vergelijking is $l : y = 1.\, x + 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{l\!:\ y = x.}$

- Voor $\boldsymbol{m}$ geldt: $\boldsymbol{a} = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \dfrac{3-0}{6-(-3)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
dus wordt de vergelijking : $\boldsymbol{m}$: $\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + 1}$

- Voor $\boldsymbol{n}$ geldt: $\boldsymbol{a} = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \dfrac{-1-3}{3-(-3)} = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{\mathbf{-2}}{\mathbf{3}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
dus is de vergelijking is $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{y = \frac{-2}{3}x + 1}$

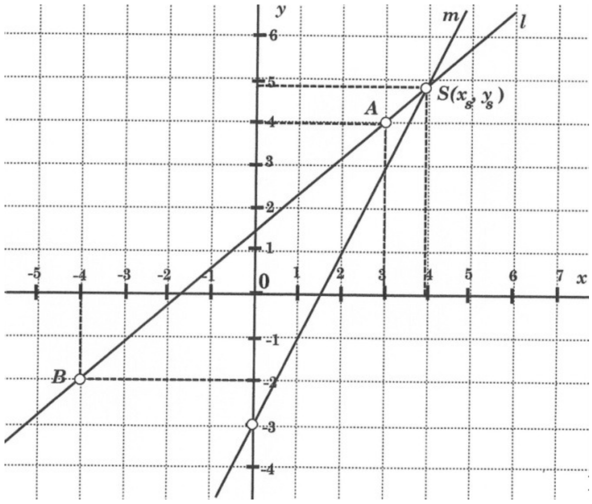
- Voor $\boldsymbol{o}$ geldt: $\boldsymbol{a} = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \dfrac{-5-3)}{5-(-3)} = \dfrac{-8}{8} = \mathbf{-1}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$
dus de vergelijking is: $\boldsymbol{o}$: $\boldsymbol{y = -x}$

- Voor $\boldsymbol{p}$ geldt $\boldsymbol{a} = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \dfrac{0-6}{4-0} = -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ en $\boldsymbol{b} = \mathbf{6}$
dus de vergelijking is: $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x + 6}$

- b - Voor *alle punten op de x-as* geldt: $y = 0$, dus onafhankelijk van de waarde van *x*.
De vergelijking van de *x*-as is dan**:** $\boldsymbol{y = 0}$ of vollediger**:** $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ **en** $\boldsymbol{y = 0}$
Zo geldt voor alle punten van de *y-as* $\boldsymbol{x = 0}$ ***ofwel:*** $\boldsymbol{x = 0}$ **en** $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}}$

- c - Alle punten (*x, y*) van de lijn *q* met vergelijking $x = 3$, zijn van de vorm (3, *y*).
Het is dan de (verticale) ***lijn, evenwijdig met de y-as door het punt* (3, 0)**
Zo is de lijn *r*: $y = -5$ de (*horizontale) lijn evenwijdig* ***met de x-as door het punt* (0, - 5)**

2. - a. Bepaal de vergelijking van de lijn l door de punten $A = (3, 4)$ en $B = (-4, -2)$
 - b. Bepaal het snijpunt van de lijn l met de lijn m: $y = 2x - 3$



a. In l: $y = ax + b$ volgt de richtingscoëfficiënt van l uit: $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-4}{-4-3} = \frac{-6}{-7} = \mathbf{\frac{6}{7}}$

Lijn l heeft dan als vergelijking: l: $y = \frac{6}{7}x + b$.
Hierin de coördinaten van $A = (3,4)$ (of $B = (-4, -2)$) ingevuld geeft $\mathbf{4} = \frac{6}{7}\,.\,\mathbf{3} + b \Rightarrow b = \frac{10}{7}$ zodat de vergelijking is $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}}$ *)

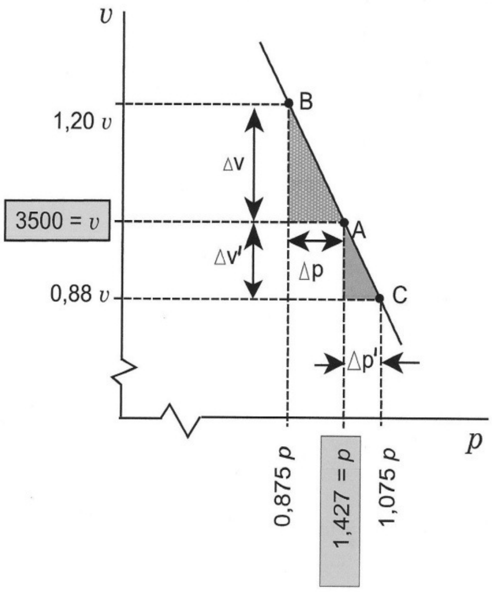
b. Het snijpunt $S\,(x_S,\ y_S)$ van de lijnen l en m ligt zowel op l als op m , dus voldoen de coördinaten x_s en y_s aan de vergelijking:

$\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{y = \frac{6}{7}x + \frac{10}{7}}$ ***en*** aan m: $\boldsymbol{y = 2x - 3}$, zodat dan $\frac{6}{7}x_s + \frac{10}{7} = 2\,x_s - 3 \Rightarrow \frac{8}{7}x_s = \frac{31}{7} \Rightarrow \boldsymbol{x_s = \frac{31}{8}}$

Uit $y_s = 2\,x_s - 3 = -\frac{1}{2}x_s + \frac{9}{2}$ volgt dan $\boldsymbol{y_s = 2.\,\frac{31}{8} - \frac{24}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}}$

Het snijpunt van l en m is dus het punt $\boldsymbol{S\,(\frac{31}{8}, \frac{19}{4}) \approx (3{,}9\ ;\ 4{,}8)}$

3. Bij een 'witte pomp' in Vreemdemuiden verkoopt men gemiddeld per dag 3500 liter 'Euro-95' benzine als hun literprijs € 1,427 bedraagt. (punt A in de grafiek).
Verlaagt men de prijs met 12,5% dan stijgt de verkoop met 20% (punt B).
Verhoogt men de prijs met 7,5% dan daalt de verkoop met 12%.(punt C).



a. Toon aan dat de punten A, B en C op een rechte lijn liggen.
b. Wat is de betekenis van de uitkomst van a voor de prijs/verkoop-verhouding bij stijgende en bij dalende prijs?

a. De richtingscoëfficiënt van AB is:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{v - 1{,}20\,v}{p - 0{,}875\,p} = \frac{-0{,}20\,v}{0{,}125\,p} = \mathbf{-\,1{,}6\,.\,\frac{v}{p}}$$

De richtingscoëfficiënt van CA is $\frac{\Delta v'}{\Delta p'} = \frac{0{,}88v - v}{1{,}075p - p}$

$$= \frac{-\,0{,}12v}{0{,}075\,p} = \mathbf{-\,1{,}6\,.\,\frac{v}{p}}$$

De richtingen van AB en CA zijn dus gelijk $\Rightarrow$
***A, B* en *C* liggen op een rechte lijn.**

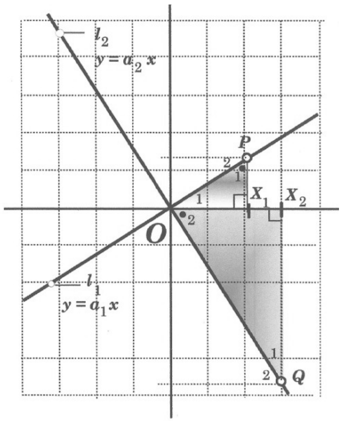
---

*) Met de grafische rekenmachine TI-83 gaat dit als volgt: Voer de *lijsten* in **{3, - 4} [STO] L1** en **{4, - 2} [STO] L2.**
Druk op **[STAT] [CALC]** en kies optie 4 [ENTER]: **LinReg (*ax + b*)** [ENTER]
De waarden van a en b worden direct getoond: LinReg $y = ax + b$: $a \approx .85714... = \frac{6}{7}$; $b \approx 1.42857.... = \frac{10}{7}$

b. De uitkomst van a. betekent dat op het traject BC de verhouding prijs*stijging* : verkoop*daling* (−1,6) gelijk is aan de verhouding prijs*daling*: verkoop*stijging.* (−1,6). Men zegt in zo'n geval dat de verkoop*daling* (bij toenemende prijs) ***evenredig** is* met de verkoop*stijging* (bij dalende prijs), want een *evenredigheid* is een gelijkheid van twee verhoudingen.

Eigenschap:

Als twee lijnen l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan dan is het product van hun richtingscoëfficiënten a_1 en a_2 gelijk aan −1, dus $a_1 \,.\, a_2 = -1$ en ook omgekeerd



Bewijs: In de figuur is vanuit een punt P op l_1 een loodlijn PX_1 op de x-as neergelaten en ook een loodlijn QX_2 vanuit een punt Q van l_2 op de x-as.

De richtingscoëfficiënten van l_1 en l_2 zijn respectievelijk:

$a_1 = \frac{PX_1}{OX_1}$; $a_2 = \frac{-QX_2}{OX_2}$, dus $\boldsymbol{a_1 . a_2} = -\ \boldsymbol{\frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2}}$ …(1)

Van de Δ Δ OPX_1 en OQX_2 *is* $\boldsymbol{\angle O_2 + \angle O_1 = 90°}$ (gegeven).

Ook is in Δ OPX_1 : $\boldsymbol{\angle P_1 + \angle O_1 =}$ 180° − 90° = **90°**

dus is $\boldsymbol{\angle P_1 = \angle O_2}$. (met zwarte stip) …(2)

De Δ Δ OPX_1 en OQX_2 zijn dan gelijkvormig omdat ze rechthoekig zijn en $\angle P_1 = \angle O_2$ volgens (2) met gevolg: $PX_1 : OX_1 = OX_2 : QX_2$

ofwel: $\frac{PX_1}{OX_1} = \frac{OX_2}{QX_2} \Rightarrow \frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{QX_2}{OX_2} = 1$ zodat $\boldsymbol{\frac{PX_1}{OX_1} \cdot \frac{-QX_2}{OX_2} = -1}$ …(3)

Uit (3) en (1) volgt dan: $\boldsymbol{a_1 . a_2} = \boldsymbol{-1}$ zoals was te bewijzen.

De stelling geldt ook omgekeerd: Als $\boldsymbol{a_1 . a_2 = -1}$ dan staan l_1 *en* l_2 *loodrecht op elkaar.*

(Lees voor het bewijs hiervan bovenstaand bewijs van achteren nar voren.)

3. *Kwadratische functies*

Een kwadratische, ofwel tweedegraadsfunctie, is een functie f(x) van de vorm
$f(x) = ax^2 + bx + c$ waarin a, b en c reële getallen zijn en $a \neq 0$

Voor het onderzoek naar de eigenschappen van tweedegraads-functies, herleiden we eerst de algemene vorm door middel van '***kwadraatafsplitsing***': [*)]

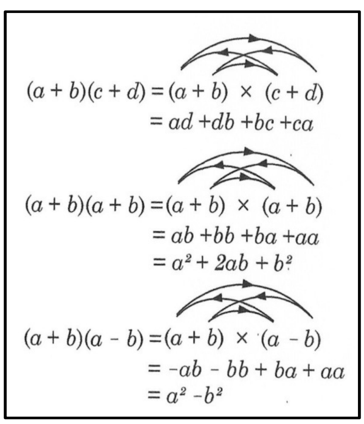
Uit de onderbouw:
'Papegaaimethode' voor producten

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

$= a\,(x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \cancel{\frac{b^2}{4a^2}}) + a.(\frac{c}{a} - \cancel{\frac{b^2}{4a^2}})$

$= a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - a\,(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a})$

ofwel: $\boldsymbol{f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}}$ met $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$ …(a)



[*)] *In deze kwadraatafsplitsing is gewerkt naar de vorm $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, een toepassing van het* ***'merkwaardig product'*** *$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dat hiernaast et de papegaaimethode is gedemonstreerd, evenals het merkwaardig product: $(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$*

Kies je nu $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ in: $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$ dan ontstaat:

$\boldsymbol{f}(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}) = a\,(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a} = a.\,0 - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$ dus $\boldsymbol{f}\,(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}) = -\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$.

Dit betekent dat $\boldsymbol{(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})}$ een punt is van ***elke kwadratische functie*** $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Noem dit punt T, dan is $\boldsymbol{T\,(x_T, y_T) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})}$ …(b)

1^0. We tonen nu aan dat het punt $\boldsymbol{T\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})}$ een *uiterste waarde* is ('***maximum'*** of ***'minimum'***) van de parabool $f\,(x)$.

Omdat volgens (a) *voor elk willekeurig punt* (x, y) *van* $f\,(x)$ geldt: $\boldsymbol{y = a\,(x + (\frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}}$

en volgens (b) voor *het punt* T geldt dat $y_T = -\frac{D}{4a}$, volgt de waarde van $\boldsymbol{y - y_T}$ uit:

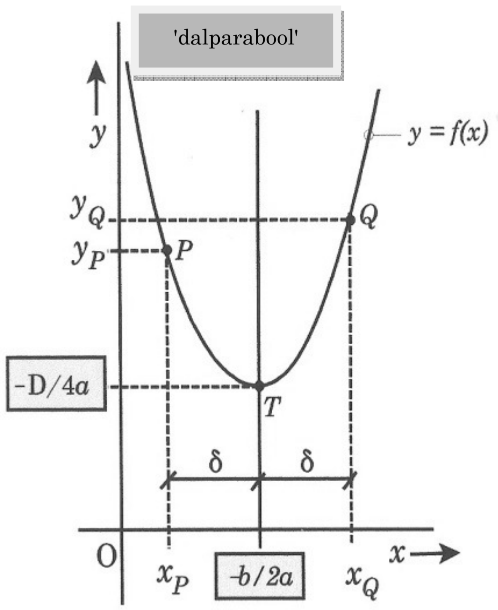
$\boldsymbol{y - y_T} = \{\,a(x + \frac{b}{2a})^2 - \cancel{\frac{D}{4a}}\} - \cancel{\frac{-D}{4a}} = \boldsymbol{a(x + \frac{b}{2a})^2 \Rightarrow y - y_T = a(x + \frac{b}{2a})^2}$ …(c)

Als in (c): $\boldsymbol{a > 0}$ dan is $a.\,(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, want $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$.

Dit betekent dan**,** dat $\boldsymbol{y - y_T > 0}$ *zodat elke waarde van* $\boldsymbol{y}$ in $y = ax^2 + bx + c$ groter dan of gelijk is aan $\boldsymbol{y_T}$, dus is het punt T $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ een ***minimum van de functie f(x).***

Op dezelfde manier blijkt uit (c) dat **als** $\boldsymbol{a < 0}$ steeds geldt $\boldsymbol{y - y_T < 0}$ ofwel: $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ is een ***maximum*** van $y = ax^2 + bx + c$ als $\boldsymbol{a < 0}$ …(d)

Het punt $T\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$, *minimum of maximum*, heet de ***top*** van de kwadratische functie *f(x).*



2^0 De lijn $x = -\frac{b}{2a}$ door T is een ***symmetrieas*** *van* $f(x)$.

Bewijs: Voor een punt P van $f(x)$ op een positieve afstand δ *links* van de lijn $x = -\frac{b}{2a}$ geldt $\boldsymbol{x_p = -\frac{b}{2a} - \delta}$ en voor een punt Q van $f(x)$ op eenzelfde afstand δ *rechts* van deze lijn is $\boldsymbol{x_Q = -\frac{b}{2a} + \delta}$.

In de vorm van de kwadraatafsplitsing is: $y = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}$, dus als $\boldsymbol{x = x_p = -\frac{b}{2a}} - \delta$

dan is $\boldsymbol{y_p} = a\,(\cancel{-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}} - \delta + \cancel{\frac{b}{2a}})^2 - \frac{D}{4a} = = \boldsymbol{a}\,\delta^2 - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$ … (e)

Als $\boldsymbol{x = x_q = -\frac{b}{2a}} + \delta$ dan is $\boldsymbol{y_q} = a\,(-\cancel{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}} + \delta + \cancel{\frac{b}{2a}})^2 - \frac{D}{4a} = \boldsymbol{a}\,\delta^2 - \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{4a}}$ …(f)

Uit (e) en (f) volgt: $\boldsymbol{y_p = y_q}$, dus P en Q liggen ***symmetrisch t.o.v. de lijn*** $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ die gaat door de *top* $T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ van de parabool. Samengevat:

De vorm van de (grafiek van de) kwadratische functie heet ***parabool***, de symmetrieas heet de ***as***, het maximum of minimum T heet de ***top*** van de parabool. Als $a > 0$ dan is de top T een *minimum* (*'dalparabool'*), als $a < 0$ dan is top T een *maximum* (*'bergparabool'*).

De grafiek van $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ *met* $a \neq 0$ *is een parabool met verticale as* $x = \frac{-b}{2a}$ *en een punt* $T = (\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$ *als top, waarin* $D = b^2 - 4ac$. *Als* $a > 0$ *dan is T een minimum ('dalparabool'), als* $a < 0$ *dan is T een maximum ('bergparabool')*

a. Nulpunten van een kwadratische functie

Eventuele snijpunten van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ met de x- as ($y = 0$) moeten voldoen aan de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ ***en*** *aan* $y = 0$ dus zijn de ***oplossingen*** = ***wortels*** van de *vergelijking* $ax^2 + bx + c = 0$. Ze worden ook ***nulpunten*** van $f(x)$ genoemd..
Voor een algemene oplossing van deze vergelijking wordt meestal de '***abc-formule***' gebruikt:

Afleiding van de abc-formule

Schrijf je de oplossingsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ in de vorm van de *kwadraat-afsplitsing,* (blz. 5) dan ontstaat: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = 0$.
De nulpunten x volgen dan uit: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a} \Rightarrow \frac{1}{a}.\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}.\ \frac{D}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}$
met gevolg: $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}} \vee \boldsymbol{x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$

Nulpunten van $f(x) = ax^2 + bx + c$ *zijn oplossingen van de vergelijking* $y = ax^2 + bx + c = 0$ *die je berekent met de 'abc-formule':* $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *waarin* $D = b^2 - 4\,ac$

De waarde van D hierin bepaalt het *aantal oplossingen,* dus het *aantal wortels* van $ax^2 + bx + c = 0$. Men noemt daarom D de ***discriminant*** van deze vergelijking:

1^0. Als $\boldsymbol{D} = b^2 - 4\,ac\ \boldsymbol{> 0}$ dan bestaat $\sqrt{D}$ en heeft de vergelijking *twee verschillende wortels*: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$. De parabool snijdt de x-as dan in twee punten.

2^0. Als $\boldsymbol{D = 0}$ dan is $\boldsymbol{b^2 - 4\,ac = 0} \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ dus heeft de vergelijking slechts één *tweevoudige*, ('*dubbel tellende*') wortel $x = -\frac{b}{2a}$.
Top T met $x_T = -\frac{b}{2a}$ is dan een ***raakpunt*** ('twee samenvallende punten') op de x-as.

3^0. Als $\boldsymbol{D < 0}$ dan bestaat $\sqrt{D}$ niet in $\mathbb{R}$ dus zijn er *geen reële oplossingen.*
De parabool snijdt de x-as niet. Er zijn *geen reële nulpunten* . [*)]

b. Ontbinden van kwadratische functies

De functie $f(x) = x^2 + bx + c$ *met nulpunten* $x = x_1$ *en* $x = x_2$
is te schrijven als $f(x) = (x - x_1).(x - x_2)$

[*)] Op blz.51-52 worden imaginaire oplossingen (complexe getallen) van vierkantsvergelijkingen behandeld in geval $D < 0$. In Hoofdstuk XIV –G worden expliciet voor wiskunde D de complexe getallen uitgebreid behandeld.

Bewijs::
De nulpunten x_1, x_2 van de vierkantsvergelijking $y = ax^2 + bx + c$ ***met a* = 1** zijn volgens de *abc-formule*: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2}$ en $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$ met $D = b^2 - 4c$ en $a = 1$ dus volgt dan het ***product*** uit: $(x - x_1).(x - x_2) = \{x - (\frac{-b+\sqrt{D}}{2})\}.\ \{x - (\frac{-b-\sqrt{D}}{2})\} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{(x - x_1).(x - x_2)} = \left(\frac{2x + b - \sqrt{D}}{2}\right).\left(\frac{2x + b + \sqrt{D}}{2}\right) = \frac{4x^2 + 4bx + b^2 - D}{4} = \frac{4x^2 + 4bx + \mathbf{4c}}{4}$$

(want $D = b^2 - 4ac$ en $a = 1$ dus $b^2 - D = 4c$) zodat $\boldsymbol{(x - x_1).(x - x_2) = x^2 + bx + c}$ ...(1)

Met de gelijkheid $\boldsymbol{x^2 + bx + c} = (\boldsymbol{x - x_1})(\boldsymbol{x - x_2})$ is de term $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$ volgens (1) ***ontbonden in twee factoren*** $(\boldsymbol{x - x_1})$ **en** $(\boldsymbol{x - x_2})$ als x_1 en x_2 de *nulpunten* van $f(x)$ zijn.
Uitgewerkt geeft dit: $x^2 + \boldsymbol{b}\, x + \boldsymbol{c} = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \boldsymbol{(x_1 + x_2)}.\, x + \boldsymbol{x_1 . x_2}$
waarin dus $\boldsymbol{(x_1 + x_2) = -b}$ en $\boldsymbol{x_1 . x_2 = c}$. ...(2)
Op deze eigenschap berust een methode om de wortels x_1 en x_2 van $f(x) = \mathbf{1}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = 0$ snel te vinden:

Voorbeeld: Bepaal de wortels van de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$,

Ontbind het linkerlid in factoren, dus schrijf $x^2 - 11x + 28 = (x - p)(x - q) =$
$= x^2 - (p+q)x + p.q$. *(Steeds mogelijk als* $D \geq 0$ *is, omdat er dan één of twee nulpunten p, q zijn, dus regel (1) van toepassing is.)*
Hiervoor geldt dan $p + q = 11$ en $p.q = 28$, waaruit direct volgt $p = 4$ en $q = 7$ zodat
$x^2 - 11x + 28 = ((x - 4).(x - 7)$ dus vindt je de nulpunten uit:
$x^2 - 11x + 28 = 0 \Rightarrow (x - 4).(x - 7) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 4 \vee x = 7}$ volgens de 'Wet van het nulelement':
Als $a.b = 0$ dan $a = 0 \vee b = 0$. De wortels van $x^2 - 11x + 28 = 0$ zijn $\boldsymbol{x = 4 \vee x = 7}$

Toepassingen: 1. Bereken de nulpunten van $f(x) = x^2 - x - 12$

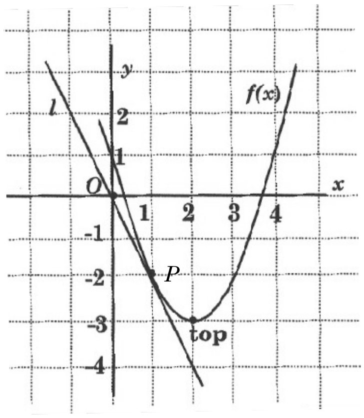
Schrijf $x^2 - x - 12 = (x - p).(x - q) = x^2 - (p+q)x + p.q$, dan is $p + q = 1$ en $p.q = -12$.
Hieraan voldoen $p = 4$ en $q = -3$ dus als $x^2 - x - 12 = 0$, dan is $(x - p).(x - q) =$
$\boldsymbol{(x - 4).(x + 3) = 0}$ zodat $x - 4 = 0 \vee x + 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 4 \vee x = -3}$
De nulpunten zijn dus: $\boldsymbol{x = 4}$ **en** $\boldsymbol{x = -3}$

2. Los op: $x^2 + 2x - 143 = 0$
Stel $x^2 + 2x - 143 = (x - p).(x - q) = x^2 - (p+q)x + p.q$, dan is
$p + q = -2$ en $p.q = -143$ dus $p = -13$ en $q = 11$. Gevolg: Als $x^2 + 2x - 143 = 0$, dan is
$(x - (-13)).(x - 11) = \mathbf{0}$ zodat $x + 13 = 0 \vee x - 11 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 11 \vee x = -13}$

***Opgav*e**: Gegeven is de parabool $f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0$

a. Bepaal de top van de parabool.

Uit kwadraatafsplitsing volgt dat voor de parabool geldt: $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$.
Omdat voor elke x geldt dat $(x - 2)^2 \geq 0$ is steeds $y \geq -3$ dus geldt voor de coördinaten van top T (= minimum van de dalparabool omdat $a > 0$): $\boldsymbol{y_T = -3}$ en $y_T = (x_T - 2)^2 - 3 \Rightarrow \boldsymbol{x_T = 2}$.
De top is dus het punt $\boldsymbol{T(2,-3)}$,



b. Bepaal de raaklijn in het punt (1, − 2) van de parabool,

Het punt P (1, − 2) ligt op de parabool $y = x^2 - 4x + 1$ want
$-2 = 1^2 - 4.1 + 1$ dus voldoet aan de vergelijking.
Noem de raaklijn l: $y = ax + b$, dan geldt voor het raakpunt op l
$P(1, -2) = a.1 + b \Rightarrow a + b = -2 \Rightarrow \boldsymbol{a = -2 - b}$. …(1)
Omdat het raakpunt zowel op de parabool als op de raaklijn ligt
geldt: $y = x^2 - 4x + 1 = (-2 - b)x + b \Rightarrow$
$x^2 - 4x + 1 = -2x - bx + b \Rightarrow x^2 - 4x + 2x + bx + 1 - b = 0$
$x^2 - 2x + bx + 1 - b = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x^2 + (b-2)x + (1-b) = 0}$
De discriminant van deze tweedegraadsvergelijking moet = 0 zijn omdat de vergelijking één wortel heeft, (raakpunt, dus dubbeltellende wortel)) dus is deze
$\boldsymbol{b^2} - 4.\boldsymbol{ac} = (b-2)^2 - 4.1.(1-b) = 0 \Rightarrow b^2 - 4b + 4 - 4 + 4b = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b = 0}$ …(2)
Uit (2) en (1) volgt dan: $b = 0$ en $a = -2$, dus is de raaklijn l: $y = ax + b \Rightarrow \boldsymbol{y = -2x}$ **.**

4. ***Machtsfuncties***

De functie $y = f(x) = x^n$ is een machtsfunctie van x, waarin de exponent n een constante is en het grondtal x de variabele

Enkelvoudige *machtsfuncties* zijn van het type $y = f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{R}$, samengestelde machtsfuncties zijn van de vorm $y = f(x) = ax^p + bx^q + cx^r + \ldots$ (a,b,c en $p,q,r \in \mathbb{R}$) en worden vaak ***polynomen*** genoemd.
Uitgaand van de *definitieformule van een natuurlijke macht* van x:

$\boldsymbol{x^1} = x$, $\boldsymbol{x^2} = x.x$, $\boldsymbol{x^3} = x.x.x$, $\boldsymbol{x^4} = x.x.x.x$ of algemeen: $\boldsymbol{x^n} = \overbrace{\boldsymbol{x.x\ldots.x}}^{n\ keer}$ volgen direct de *regels*: $\boldsymbol{x^p . x^q = x^{p+q}}$, $\boldsymbol{\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}}$ en $\boldsymbol{(x^p)^q = x^{p.q}}$. Hieruit volgen de eigenschappen:
$\frac{x^p}{x^p} = x^{p-p} = \boldsymbol{x^0}$ en ook e $\frac{x^p}{x^p} = 1$, dus $\boldsymbol{x^0 = 1}$ en $\frac{1}{x^p} = \frac{x^0}{x^p} = x^{0-p} = \boldsymbol{x^{-p}}$ en
$\boldsymbol{\sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}}}$ omdat $(x^{\frac{1}{p}})^p = x^{\frac{1}{p} \cdot p} = x^1 = x$. Zo ook: $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

$$a^p . a^q = a^{p+q} \qquad (a^p)^q = a^{p.q} \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \qquad a^0 = 1$$
$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad (a.b)^p = a^p . b^p \qquad \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

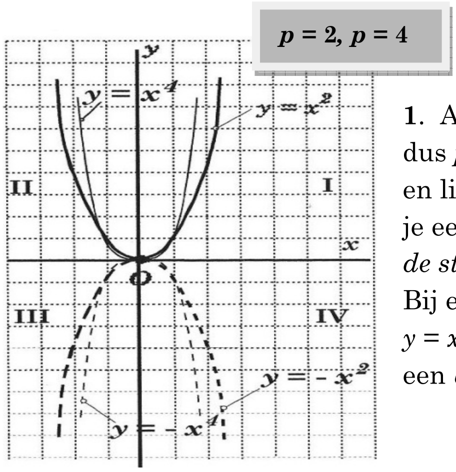
Per definitie gelden deze rekenregels ook voor *machten met reële exponenten*:
Voorbeelden: $\boldsymbol{3^7 . 3^{-9}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $\boldsymbol{5^{-2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^5}}$, $\boldsymbol{7^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[4]{7^3}$, $12^{-0,38} \approx \boldsymbol{0,389}$ (GR)

Machtsfuncties waarin x hoogstens tot de macht n voorkomen, heten n^{de} graads machtsfuncties .

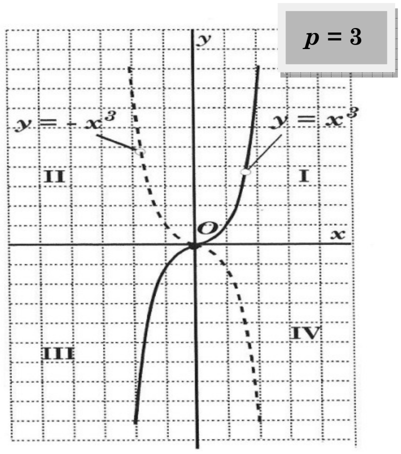
Zo is het *polynoom* $f(x) = ax + b$ een machtsfunctie van de *eerste graad,* polynomen als $f(x) = ax^2 + bx + c$ zijn van de *tweede graad,* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ van de *derde graad* et cetera. (De besproken *'lineaire functie'* $f(x) = ax + b$ is dus een *eerstegraads machtsfunctie*, de *'kwadratische functie'* $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een *tweedegraads machtsfunctie*).

a. Grafieken van machtsfuncties

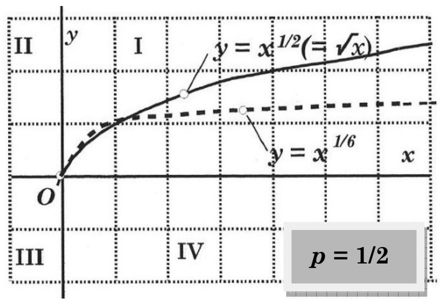
Aan de *graad van enkelvoudige machtsfunctie* kun je de (globale) grondvorm van hun grafieken herkennen. We onderzoeken hier de grafieken in de *vier kwadranten* I, II, III en IV van *machtsfuncties* $\boldsymbol{f(x) = y = x^p}$ bij verschillende waarden van p.



1. Als ***p* in $\boldsymbol{y = x^p}$ een positief, even getal** is, dus p = 2, 4, 6,.. dan zijn alle y-waarden van $\boldsymbol{y = x^p}$ positief en ligt de grafiek geheel in I en II. In de grondvorm herken je een ***dal****paraboloïde, die als p = 4, 6, 8, …'scherper' is dan de standaard dalparabool* $\boldsymbol{y = x^2}$ *met p* = 2.
Bij eenzelfde waarde van p is $\boldsymbol{y = -x^p}$ het spiegelbeeld van $y = x^p$ in de x-as (gestreept) en zie je daarin als grondvorm een **berg***paraboloïde.*



2. Is ***p* in $\boldsymbol{y = x^p}$ een positief, oneven, geheel getal ≠ 1**, dus p = **3**, 5, 7,… dan bestaan er in tegenstelling tot de *even* machten van x (x^2, x^4, x^6, … die steeds ≥ 0 zijn), ook *negatieve* y waarden. Bijvoorbeeld $(-3)^3 = -27 = -(3^3)$.
Hierdoor heeft $y = x^p$ bij *oneven p* dan ook waarden in het *eerste- en derde kwadrant.*
Omdat $(-x)^p = -(x^p)$ is de grafiek van $\boldsymbol{y = -(x^p)}$ een *spiegeling in de oorsprong* van $y = x^p$.

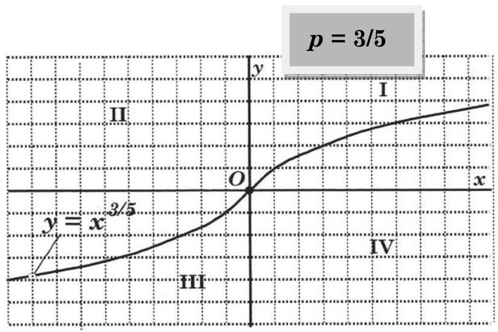


3. Als p **in $\boldsymbol{y = x^p}$** een positieve breuk is, waarvan de ***teller oneven is en de noemer even,*** zoals in $y = x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{1}{6}}$ dan bestaan er *geen reële y waarden bij negatieve x.* Zo is $y = x^{\frac{1}{2}}$ als $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{-1}}$ en is $y = (-x)^{\frac{1}{6}}$ bij $x = -1$ gelijk aan $(-1)^{\frac{1}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{-1}}$ dus bestaan beide niet in ℝ.
Omdat bij een positieve exponent, alle machten van een positief getal ook positief zijn, liggen alle waarden van $y = x^p$ in I.

4. Als p **in $\boldsymbol{y = x^p}$** een positieve breuk is, met ***teller en noemer oneven*** dan bestaan er ook reële y waarden bij *negatieve x,* die dan ook zelf negatief zijn, en dus in III liggen.
Zo is hier de y waarde van $x = -4$ in $y = x^{\frac{3}{5}}$:

$y = (-4)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-4)^3} = \sqrt[5]{-64} \approx -2{,}297.$

De grafiek van $y = x^{\frac{3}{5}}$ ligt nu in I en III. *)



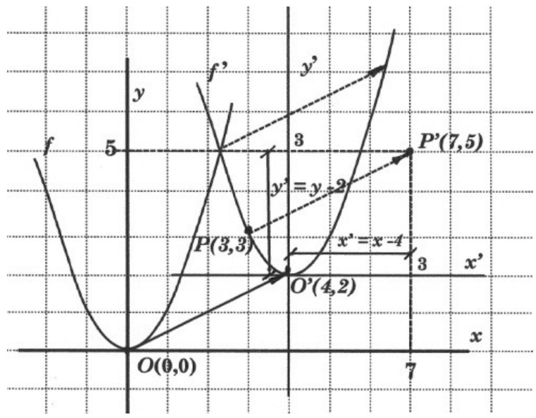
---

*) Met de GR TI-83 zijn alle grafieken direct te 'plotten'. VB: Druk op Y1= en voer in X^(3÷5) ENTER.
Druk op WINDOW en kies Xmin = −5, Xmax = 5, Ymin = −5, Ymax = 5. Kies Xscl =1 en Yscl =1 (Xres=1) ENTER
Druk op Graph en de grafiek uit 4 verschijnt op het display.

b. Transformaties

Uit de grafieken van standaardfuncties zoals $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ *kan je* via *transformaties* vaak gemakkelijk formules afleiden van meer gecompliceerde functies.
Bij ***congruentietransformaties*** als: *translatie* ('*evenwijdige verschuiving*' van $y = f(x)$), *rotatie* (*draaiing* om de oorsprong O) en *spiegeling* (*vermenigvuldiging* t.o.v. een lijn *met de factor* -1) ontstaat uit $f(x)$ een *beeld* $f'(x)$ dat *congruent* is met $f(x)$. *Voorbeeden*:

- *Transformaties door translatie*



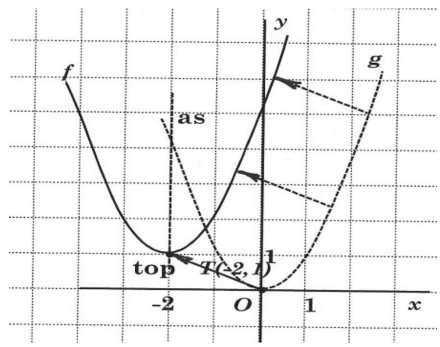
Hiernaast is in een *XOY* stelsel de grafiek *f* getekend van de '***standaardparabool***' $y = x^2$. De top ligt in de oorsprong *O*. Via een ***translatie T* (4,2)** *verschuiven* alle punten over +4 eenheden *naar rechts* (*positieve x-richting*) en + 2 eenheden omhoog (*positieve y-richting*), waardoor een ***met f congruente*** *grafiek f' ontstaat* . De oorsprong $O(0,0)$ = top van *f*, wordt nu afgebeeld op het punt $O'(4, 2)$,de oorsprong van het verschoven assenstelsel $x'\,O'\,y'$.
Een *willekeurig* punt ***P*(*x,y*)**, (in de figuur ***P*(3,3)**), wordt door de translatie $T(4, 2)$ afgebeeld op het punt
***P'* (*x* + 4, *y* + 2), (**in de figuur ***P'*(7,5)).**
Ten opzichte van het $x'\,O'\,y'$*-stelsel* geldt dan dat $\mathbf{x' = x - 4}$ en $\mathbf{y' = y - 2}$ …(1)
De vergelijking van de verschoven parabool *f' is* $\mathbf{f': y' = (x')^2}$ want de top van *f'* ligt in de oorsprong *O'* dus geldt hier de t*opvergelijking* ten opzichte van het stelsel $x'O'y'$.
Substitutie hierin van de waarden $\mathbf{x'} = x - 4$ *en* $y' = y - 2$ uit (1) geeft als vergelijking van de parabool $f' : y' = x'^2 : y - 2 = (x - 4)^2 \Rightarrow \mathbf{y = (x - 4)^2 + 2}$. …(2)
Noem je de *translatie* $T(4,2)$ nu algemeen $T(a, b)$, dan volgt direct uit (2):

$$\boldsymbol{f : y = x^2 \Rightarrow T(a, b) \Rightarrow f' : y = (x - a)^2 + b} \qquad \text{… (3)}$$

Deze transformatieregel werd voor beter begrip afgeleid via de functie $f(x) = y = x^2$ door op het translatiebeeld $y' = x'^2$ de *algemeen geldende betrekkingen bij translaties* volgens regel (1) toe te passen. De regel geldt dan ook onvoorwaardelijk voor elke andere kromme $y = f(x)$, dus bijvoorbeeld voor $y = \sqrt{x}$, $y = \ln(x)$, $y = \sin(x)$, …
We definiëren daarom algemeen de ***translatietransformatie-regel:***

> *Bij de translatie T (a,b)* geldt *voor de coördinaten* (x', y') *van het beeldpunt P' van een punt P (x, y) t.o.v. het verschoven assenstelsel* $x'\,O'\,y'$: $x' = x - a$, $y' = y - b$
> *Voor het beeld f'(x) van een functie f(x) geldt dan t.o.v. het* **XOY** *stelsel:* $\mathbf{y = f(x - a) + b}$

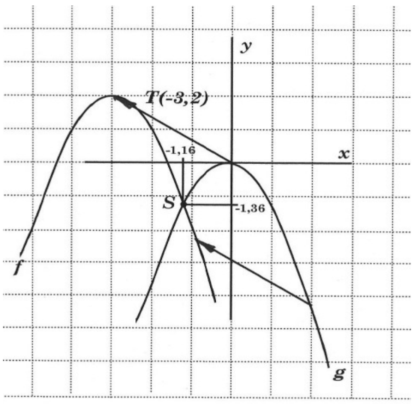
Toepassingen:
1. Schets de grafiek van de functie *f*: $y = (x + 2)^2 + 1$



Volgens regel 3 hierboven gaat bij een translatie $T(a, b)$ de grafiek *g* van $y = f(x) = x^2$ over in $f: y = (x - a)^2 + b$. In f: $y = (x + 2)^2 + 1$ is dan $a = -2$ en $b = 1$ dus ontstaat de functie *f*: $y = (x + 2)^2 + 1$ uit een ***translatie*** van de standaardfunctie *g*: $y = x^2$ ***van T* (−2, 1).** In de figuur is de grafiek van *f* getekend.
De **top** is dan het punt **(−2, 1)**, de **as** is de lijn $\mathbf{x = -2}$.

2. Schets de grafiek van de functie f: $y = -\,x^2 - 6\,x - 7$ en bepaal het snijpunt van f en de parabool g: $y = -\,x^2$

Door kwadraatafsplitsing herleid je eerst de gegeven functie f: $y = -\,x^2 - 6\,x - 7$ tot:
f: $(-\,x^2 - 6\,x - 9) + 2 = -(\,x + 3)^2 + 2$.
Volgens de translatietransfomatie-regel is dit de grafiek van de functie die ontstaat uit de standaardfunctie g: $\boldsymbol{y = -\,x^2}$ door de ***translatie T* (– 3, 2)**.



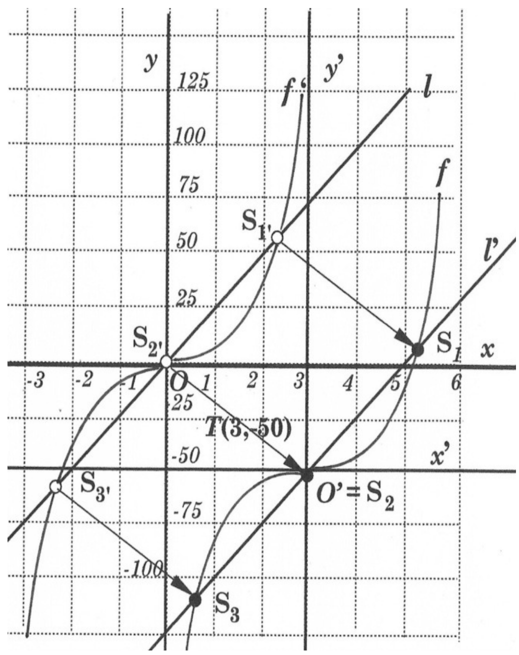
De ***top*** van (bergparabool) f is dan het punt **(– 3, 2)**
*de **as** is de lijn met* **x =** – 3.

Het ***snijpunt S*** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ van de grafieken f en g volgt uit:
$y = -\,x^2 - 6\,x - 7 \;\wedge\; y = -\,x^2$ dus uit $-6\,x - 7 = 0$ zodat
$\boldsymbol{x} = -\,\frac{7}{6} \approx -1{,}16$ en $\boldsymbol{y} = -\,x^2 = -\left(-\,\frac{7}{6}\right)^2 \approx -1{,}36$.

Het gevraagde snijpunt is dan $\boldsymbol{S}$ **(–1,16; –1,36).**

3 Schets de grafiek van de functie f: $y = (\,x - 3)^5 - 50$ en bepaal de coördinaten van de snijpunten van f met de lijn l: $y = 25\,x$.

De grafiek van de functie f: $y = (\,x - 3)^5 - 50$ ontstaat uit f : $y = x^5$ door de ***translatie T* (3, – 50)**.

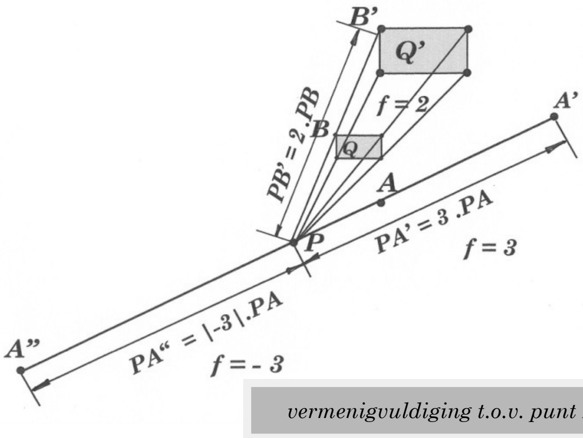


De snijpunten van de lijn l: $y = 25\,x$ met
de grafiek van f bereken je in het $x'\,O'\,y'$ -stelsel
omdat daarin geldt $f\,'$: $y\,' = (\,x')^5$ en $l\,'$: $y' = \frac{50}{2}x' = 25\,x'$,
want $l\,' \,//\, l$ *gaat door* O .
Voor de snijpunten van $l\,'$ en $f\,'$ geldt dan $(x'\,)^5 = 25\,x'$
dus $\boldsymbol{x' = 0}$ $\vee$ $(\,x')^{\,4} = 25 \Rightarrow \boldsymbol{x' = \pm\sqrt[4]{25}} = \pm\sqrt{\mathbf{5}}$
Uit $y' = 25\,x'$ volgt dan $\boldsymbol{y' = 0}$ $\vee$ $\boldsymbol{y' \approx \pm 25 \,.\, \sqrt{5}}$

De snijpunten van f': $y = (\,x - 3)^5 - 50$ en l: $y = 25\,x$ zijn S_1', S_2' en S_3' ((witte stippen in de figuur), met:
$\boldsymbol{S_1'} = \left(\sqrt{5}\,, 25\,\sqrt{5}\right)$; $\boldsymbol{S_2'} = (0{,}0)$; $\boldsymbol{S_3'} = (-\sqrt{5}; -25\,\sqrt{5})$

De gevraagde snijpunten S_1, S_2 en S_3 ((zwarte stippen in de figuur), van l' en f zijn dan:
$\boldsymbol{S_1} = (\sqrt{5}; 25\,\sqrt{5}) + \mathrm{T}(3, -50) = \boldsymbol{(\sqrt{5} + 3,\ 25\,\sqrt{5}\ -50)}$
$\boldsymbol{S_2} = (0{,}0) + \mathrm{T}(3, -50) = \boldsymbol{(3, -50)}$
$\boldsymbol{S_3} = (-\sqrt{5}, -25\,\sqrt{5}) + \mathrm{T}(3, -50) = \boldsymbol{(3 - \sqrt{5},\ \ -25\,\sqrt{5} - 50}$

NB: Hiermee zijn de snijpunten van f: $y = (\,x - 3)^5 - 50$ en l: $y = 25\,x$ *exact bepaald,* via de translatietransformatie T (3, – 50). In feite is daarmee de *vijfdegraadsvergelijking*: $(\,x - 3)^5 - 50 = 25\,x$ langs grafische weg *exact* opgelost, waarmee de betekenis van de translatietransformatie duidelijk is gedemonstreerd.

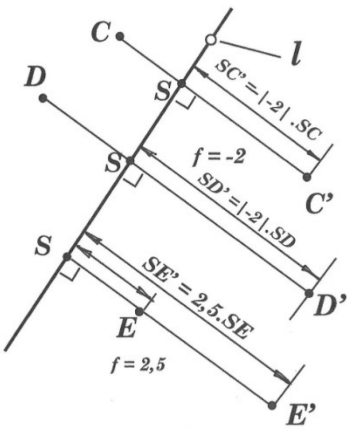


vermenigvuldiging t.o.v. punt P

Transformaties door vermenigvuldiging

Ook bestaan transformaties van functies door *vermenigvuldiging van figuren.*
Men onderscheidt daarbij:
a - vermenigvuldiging *ten opzichte van een punt*
b - vermenigvuldiging *ten opzichte van een lijn*

a. Per definitie is het *product* van een punt *A* ***ten opzichte van een punt P*** (= *het 'centrum'*) bij een *positieve factor f ,* het punt *A'* op de lijn *PA*, waarvoor geldt dat ***PA' = f × PA.***
Zo is ook de rechthoek ***Q'*** het beeld van ***Q*** bij vermenigvuldiging t.o.v. *P* met de factor *f* = +2
Bij een *negatieve fac*tor ***f*** ligt het beeldpunt *A''* van punt *A* *op de lijn AP* ***aan de andere kant van P*** *als A* en wel zo dat ***PA'' = |f | × PA,*** *hier PA''* = | –3 | × *PA*

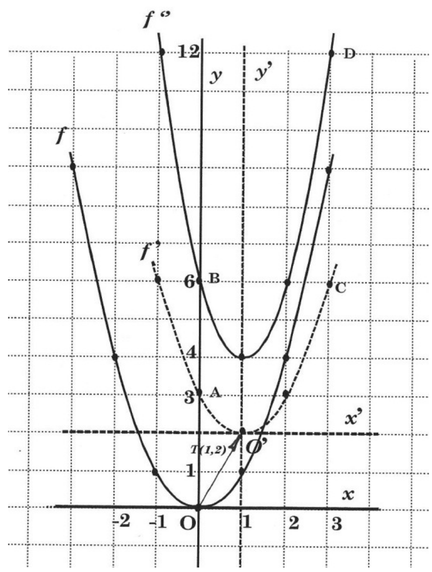


vermenigvuldiging t.o.v. lijn l

b. Bij vermenigvuldiging van een punt *E* ***ten opzichte van een lijn l*** met een *positieve factor f* ontstaat het beeldpunt *E'* door vanuit *E* een *loodlijn op l* neer te laten en vanuit het *voetpunt S* van die loodlijn een afstand *SE'* zo af te passen, dat ***SE' = f × SE,*** in de figuur is ***f = 2,5*** dus ***SE' = 2,5 × SE***

Bij een *negatieve* factor ***f*** ligt het beeldpunt *D'* van punt *D* *op de lijn DS* ***aan de andere kant van S als D,*** en wel zo dat ***SD' = |f| × SD,*** dus in de figuur met *f* = –2: ***SD' =| –2 | × SD***
Zo is ook C' het beeldpunt van C bij vermenigvuldiging van C t.o.v. *l met de factor f* = *–2, zodat* ***SC'=| –2 |× SC***

Toepassing:
Teken de grafiek van de functie *g:* $y = \mathbf{2}x^2 - 4x + 6$.



Omdat de *coëfficiënt van* $x^2 \neq \mathbf{1}$ heeft *g* niet de vorm van de *standaardparabool* $y = x^2$ zoals wel alle grafieken van de functies $y = \mathbf{1}\,x^2 + b\,x + c$. Met alleen de translatietransformatie kan je deze opgave dus niet oplossen. Ga daarom als volgt te werk:
1^0 Pas kwadraatafsplitsing toe, dus schrijf: *g:* $y = 2x^2 - 4x + 6$
$\Rightarrow\ y = 2\,(x^2 - 2x + 3) = 2\,\{(x^2 - 2x + 1) + 2\} = \mathbf{2\,(x-1)^2 + 4}$

2^0 Pas *de* ***translatie*** $T(1,2)$ toe op de punten van de standaardgrafiek $f: y = x^2$ zodat het beeld ontstaat van de grafiek $f' = (x-1)^2 + 2$ (volgens de *translatietransformatie-regel*).

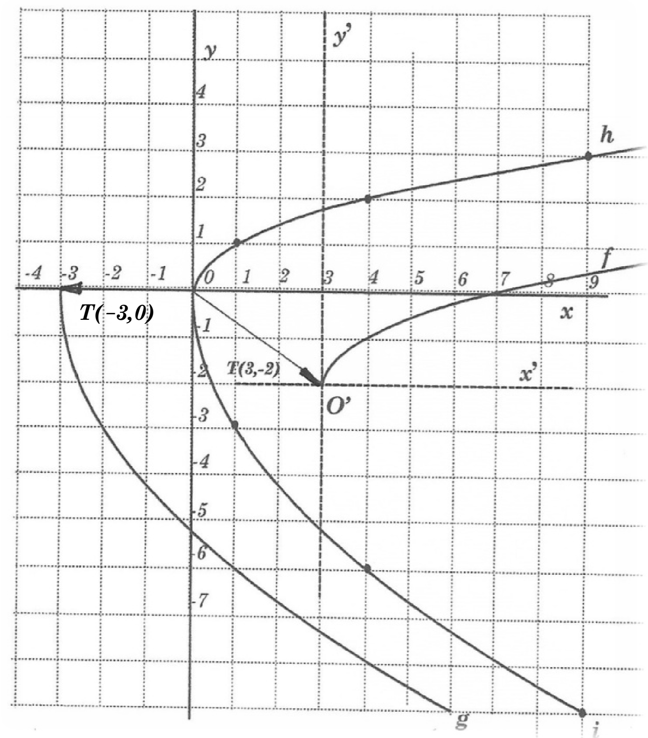
3^0 *Vermenigvuldig* dit beeld *f '* *ten opzichte van de x-as met* + 2 (notatie *P (x –as,* 2*).*
Dit geeft: $\mathbf{f'': y = 2.\,(x-1)^2 + 4 = 2x^2 - 4x + 6}$, de gevraagde parabool ***g*** **,** want uit de definitie van vermenigvuldiging t.o.v. een lijn (hier de *x*-as) volgt direct de eigenschap:

Bij de vermenigvuldiging P (x -as , a) gaat een functie y = f(x) over in y = a. f (x)

- *Transformaties van wortelvormen*

Ook de grafieken van *wortelvormen* (*machtsfuncties* met gebroken exponent) kunnen via translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as, afgeleid worden uit hun standaardvorm $y = \sqrt{x} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{0,5}}$

Voorbeelden:



a. Schets de grafieken van de functies
f: $y = \sqrt{x-3} - 2$ en *g:* $y = -3\sqrt{x+3}$
b. Geef de coördinaten van het beginpunt van elk..
c. Geef domein en bereik aan van beide functies.

a. Teken de standaardgrafiek *h:* $y = \sqrt{x}$.
Deze heeft als startpunt het punt (0,0) en gaat verder door de roosterpunten (1,1), (4,2), (9,3),...
- Pas nu op h de translatie T (3,−2) toe dan ontstaat volgens de translatietransformatie-regel de gevraagde grafiek ***f:*** $\boldsymbol{y = \sqrt{x-3} - 2}$

- Uitgaande van de standaardgrafiek *h:* $y = \sqrt{x}$ *vermenigvuldig* je deze *t.o.v. de x-as* met de factor **– 3**, waaruit de grafiek ***i:*** $\boldsymbol{y = -3\sqrt{x}}$ ontstaat.
Pas hierop de translatie T (0,−3) toe, dan vind je de grafiek van ***g:*** $\boldsymbol{y = -3\sqrt{x+3}}$ welke werd gevraagd.

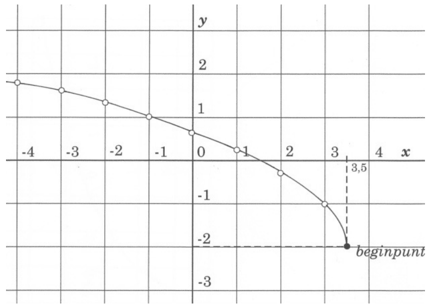
b. In de figuur zie je direct dat het *beginpunt van **f:*** $y = \sqrt{x-3} - 2$ het ***beeldpunt O'*** $\boldsymbol{(3,-2)}$ is van het origineel (0,0) van *h:* $y = \sqrt{x}$ bij de translatie $T(3, -2)$.
Zo is het beeldpunt $\boldsymbol{(-3, 0)}$ het ***beginpunt van*** *g:* $y = -3\sqrt{x+3}$.

c. De linkergrens van het *domein* van de ***standaardgrafie**k **h:*** $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ is $x = 0$ in *het punt O* (0,0), de rechtergrens is ∞, dus $\boldsymbol{D_h} = [\,\mathbf{0}, \rightarrow \rangle$ De linkergrens van het *bereik* van h *is* de waarde $y = 0$, de rechtergrens is $y = +\infty$ dus $\boldsymbol{B_h} = [\,0\,, \rightarrow \rangle$. Daaruit volgt dan:
De linkergrens van het ***domein*** van $\boldsymbol{f}$ *is* $x = 3$ de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $\boldsymbol{D_f} = [\,\mathbf{3}, \rightarrow \rangle$
linkergrens van het ***bereik*** van $\boldsymbol{f}$ *is* $y = -2$ de rechtergrens is $y = +\infty$, dus $\boldsymbol{B_f} = [\,\mathbf{-2}, \rightarrow \rangle$
De linkergrens van het *domein* van $\boldsymbol{g}$ *is* $x = -3$, de rechtergrens is $x = +\infty$, dus $\boldsymbol{D_g} = [\,\mathbf{-3}, \rightarrow \rangle$
linkergrens van het *bereik* van $\boldsymbol{g}$ is $\boldsymbol{y} = 0$, de rechtergrens is $y = -\infty$, dus $\boldsymbol{B_g} = \langle \leftarrow, \mathbf{0}]$.

Het is in het algemeen *niet direct* mogelijk om *wortelvormen* betrouwbaar *te 'plotten' in de GR*. Als voorbeeld de functie $f(x) = y = -2 + \sqrt{7-2x}$:

- Voer in $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ en kies via [WINDOW] $X_{min} = -4$; $X_{max} = 4$; $Y_{min} = -2$; $Y_{max} = 2$ .Andere waarden in WINDOW 1 laten, en in TBLSET TblStart en Δ Tbl op 1 instellen..
De ***tabel*** [TABLE] van de grafiek geeft *vanaf* $\boldsymbol{X = 4}$ 'ERROR' omdat daarvoor dan $\sqrt{7-2x}$ $= \sqrt{-1}$ niet bestaat. Verander je via [TBLSET] Δ Tbl in 0.1 dan geeft de GR 'ERROR' *vanaf* $\boldsymbol{X = 3,6}$
Een eenduidig 'beginpunt' van de grafiek,vindt de GR dus niet omdat de *'trace-cursor'* met een vaste stapgrootte werkt.

Een beginpunt moet dus handmatig worden bepaald: $7 - 2x \geq 0$, dus $2x \leq 7 \Rightarrow x \leq 3{,}5$, dus is *van het* ***startpunt x = 3,5*** waarbij dan
$\boldsymbol{y} = -2 + \sqrt{7-2x} = \mathbf{-2}$.



Beginpunt van f*:* $y = -2 + \sqrt{7-2x}$ *is dus het punt*
S **(3, 5 ; −2)**.
Het domein van de functie is $\langle \leftarrow; 3{,}5\,]$,
het bereik is dan $[-2 , \rightarrow \rangle$
Verdere punten van de grafiek volgen uit onderstaande tabel:

x	3,5	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
y	−2, 00	−1, 00	−0,27	0,24	0,65	1,00	1,32	1,61	1,87

Toepassingen

Bereken van de volgende functies het domein, bereik en de coördinaten van het beginpunt:
$f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}$, $g(x) = -2\sqrt{x+3}$ en $h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}$

1. $\boldsymbol{f(x) = 3 + \sqrt{8-4x}}$

Er moet gelden: $8 - 4x \geq 0$ dus $-4x \geq -8 \Rightarrow \boldsymbol{x \leq 2}$.
Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het ***punt*** **(2, 3).**
Domein $D_f = \langle \leftarrow, 2\,]$, bereik $B_f = [3 , \rightarrow \rangle$

2. $\boldsymbol{g(x) = 3 + \sqrt{4x-8}}$

Hier moet gelden: $4x - 8 \geq 0$ dus $4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$.
Van het beginpunt is dan $x = 2$ dus $y = 3 \Rightarrow$ beginpunt is het *punt* **(2, 3)**
Domein $D_f = [2 , \rightarrow \rangle$ bereik $B_f = [3 , \rightarrow \rangle$

3. $\boldsymbol{h(x) = 5 - \sqrt{2x+6}}$

$2x + 6 \geq 0$ dus $\boldsymbol{x \geq -3}$. Van het beginpunt is dan $x = -3$ dus $y = 5 - \sqrt{2,(-3)+6} = 5 \Rightarrow$
beginpunt is dus het *punt* **(−3, 5)**
Domein $D_f = [\mathbf{-3}, \rightarrow \rangle$ bereik $B_f = [\leftarrow , 5]$.

5. *Exponentiële functies*

Naast de *machtsfunctie* $f(x) = x^a$ met *vaste exponent a en variabel grondtal x*, bestaat 'omgekeerd' een ***exponentiële functie*** $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ met *vast grondtal a en variabele exponent x.*

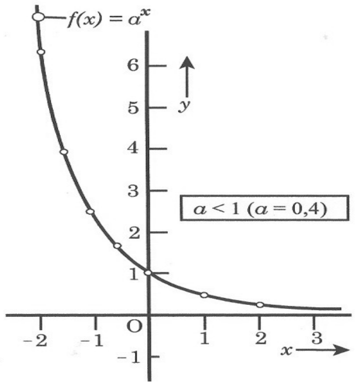
Functies waarvan de exponent x de variabele is en een positief grondtal een constante heten exponentiële functies. Algemene vergelijking: $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$ en $a \neq 1$)

Voor $\boldsymbol{a \leq 0}$ is de functie *niet gedefinieerd*.
Immers als $a = 0$ dan is $a^x = 0$ voor elke $x, \neq 0$ dus is a^x *geen functie*. Als $\boldsymbol{a < 0}$ dan *bestaat* a^x *niet* voor *elke waarde van x*. Zo zijn: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; ….
ongedefinieerd als *a negatief* is.

Bij elke exponent x, is de waarde van a^x (**$a > 0$**) steeds positief want:
- als $x > 0$ dan $a^x > 0$ omdat per definitie $a^x = a.a.a.a..a.$(x-keer) dus weer positief.
- als $x < 0$ dan $a^x = 1 / a^{-x}$ dus zeker positief omdat a^{-x} dan positief is.

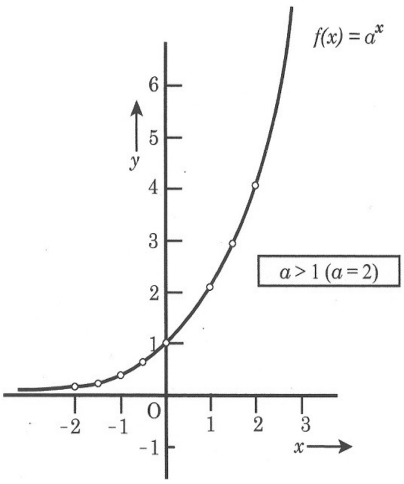
Alle grafieken van $y = f(x) = a^x$ liggen dus *in het eerste en tweede kwadrant.*
Omdat $a^0 = 1$ voor iedere a gaan *alle* grafieken *door het punt* (0,1).
Beschouw nu de *functie* **$f(x) = a^x$** voor waarden van a, met **$0 < a < 1$** en die als **$a > 1$**.

1. $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)



Voor $0 < a < 1$ is de functie ***monotoon dalend***, dus bij *toenemende x* neemt *y af*. Immers als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\, a^x$ en daar $a < 1$ is $a.\, a^x < a^x$ dus **$a^{x+1} < a^x$** zodat $f(x) = a^x$ *monotoon daalt.*
Bij *onbepaald grote toename van x,* dus *als x tot oneindig nadert*, notatie $x \to \infty$, dan daalt a^x onbepaald dicht tot nul omdat **$0 < a < 1$**. De waarde nul wordt nooit bereikt, want er bestaat geen reële x waarvoor a^x ($a \neq 0$) gelijk is aan nul, zodat bij toenemende x de grafiek steeds dichter tot de *positieve x-as* (rechts van *O*) nadert *zonder hem ooit te raken*:
De x-as heet dan een (*horizontale*) ***asymptoot*** van de grafiek van $f(x) = a^x$. ($0 < a < 1$)

2. $f(x) = a^x$ ($a > 1$)



Als $a > 1$ dan is de functie ***monotoon stijgend***, want: als $f(x) = a^x$ dan is $f(x+1) = a^{x+1} = a.\, a^x$ en daar $a > 1$ is dan $a.\, a^x > a^x$ dus **$a^{x+1} > a^x$** $\Rightarrow$ **$f(x) = a^x$** is dan *monotoon stijgend.*
Bij onbepaald grote *afname van x, dus waarden* van x wordt de waarde van a^x steeds kleiner want $a^{x-1} = \frac{a^x}{a} < a^x$ omdat $a > 1$.
Bij onbepaald grote afname van x, als x tot $-\infty$ nadert, dan nadert a^x onbepaald dicht tot nul. De waarde nul wordt nooit bereikt, omdat er geen reële x bestaat met $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0$ dus hier zal bij afnemende x de grafiek steeds dichter tot de *negatieve x-as* (links van *O*) naderen:
De x-as is ook hier een ***horizontale asymptoot***.

- Exponentiële groei

In onderstaande tabel wordt de groei weergegeven van de bevolking van Latijns-Amerika in de vierjaarlijkse perioden tussen 1950 en.1970

jaar	1950	1954	1958	1962	1966	1970
aantal $\times 10^6$	164	183	203	227	254	282

Elke periode blijkt de bevolking met een *factor* van *circa* 1,11 te zijn toegenomen, want:
$\frac{183}{164} \approx \frac{203}{183} \approx \frac{227}{203} \approx \frac{254}{227} \approx \frac{282}{254} \approx 1{,}11.$
De factor 1,11 heet in zo'n geval de ***groeifactor***. Het ***groeipercentage*** is dan 11%.

Werk je met de groeifactor de bevolkingsaantallen in de onderste rij uit, dan vind je:

aantal $\times 10^6$	**164**	**183** $= 1{,}11 \times 164$	**203** $= 1{,}11 \times 1{,}11 \times 164$	**227** $= 1{,}11 \times 1{,}11 \times 1{,}11 \times 164$	**254** $= 1{,}11 \times 1{,}11 \times 1{,}11 \times 1{,}11 \times 164$	**282** $= 1{,}11 \times 1{,}11 \times \ldots \times \ldots 164$
	$1{,}11^0 \times 164$	$1{,}11^1 \times 164$	$1{,}11^2 \times 164$	$1{,}11^3 \times 164$	$1{,}11^4 \times 164$	$1{,}11^5 \times 164$

Je ziet dan dat bij de *groeifactor* 1,11 *na* $\boldsymbol{t}$ *perioden van* 4 *jaar* (t = 0, 1, 2, 3, 4) de *beginwaarde* 164 (dus het inwonertal na t = 0 perioden) met een factor $1{,}11^{\mathbf{1}}$ **,** $1{,}11^{\mathbf{2}}$ **,** $1{,}11^{\mathbf{3}}$**,** $1{,}11^4$ $1{,}11^{\mathbf{5}}$ *is toegenomen*, dus $\boldsymbol{t}$ *perioden na de startwaarde* 160 is die waarde toegenomen tot $\mathbf{1,11^{t} \times 164.}$

Deze toename wordt ***exponentiële groei*** genoemd.
Noemen we de ***startwaarde*** 164 = $\boldsymbol{N}$ **(0)** en de *groeifactor per periode* 1,11 **=** $\boldsymbol{g}$ dan is na t perioden: $\boldsymbol{N(t) = N(0)\ .\ g^{t}}$. $N(t)$ is dus een *exponentiële functie van t.*

Bij exponentiële groei waarbij de groeifactor g in gelijke perioden constant is,
is na t perioden: $N(t) = N(0)\ .\ g^t$ ($N(0)$ = *startwaarde*)

***Toepassingen*:**

1. Een zekere hoeveelheid neemt *elk kwartier* met 12% toe. Bereken:
a. de groei*factor* per kwartier
b. de groeifactor en het groei*percentage* per uur
c. het groeipercentage per *vijf minuten*

a. Na een kwartier is de hoeveelheid gegroeid tot 1,12 × de startwaarde (= 1).
De *groeifactor per kwartier* is dan 1,12 : 1 = **1,12.**
b. De *groeifactor per uur* (4 × 1 kwartier) is $1{,}12^4 = \mathbf{1,574}$; het *groeipercentage* is dan **57,4%**
c. De groeifactor in vijf minuten (= 1/3 kwartier) is $1{,}12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1{,}12} \approx 1{,}0385$
dus het groeipercentage per vijf minuten is dan ≈ **3,85%**

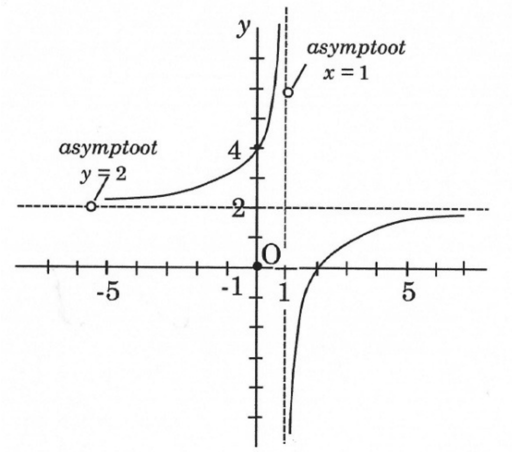
2. Een bacteriecultuur groeit exponentieel.
Op t = 4 zijn er 50.000 bacteriën, op t = 8 zijn er 130.000 bacteriën als t de tijd is in uren.
Bereken groeifactor en groeipercentage per uur en de groeifactor per dag.

De *groeifactor g* is in *vier* uur $\frac{130.000}{50.000} = 2{,}6$, dus *per uur* $(2{,}6)^{\frac{1}{4}} \approx \mathbf{1,270.}$
Het *groeipercentage* per uur is dan ≈ **27%**
Per dag is dan de groeifactor $1{,}270^{24} \approx \mathbf{310.}$

6. *Gebroken rationale functies*

Gebroken rationale functies zijn functies van de vorm $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$
waarin $g(x)$ en $h(x)$ polynomen zijn met reële coëfficiënten.

De grafieken van deze functies kunnen verschillende *hyperbolische* vormen aannemen.
Hiervan twee voorbeelden:



1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x-4}{x-1}}$

De functie is niet gedefinieerd in het punt met $x = 1$, omdat voor die waarde de *noemer gelijk aan nul* wordt en dus de bijbehorende functiewaarde onbepaald is.
De functie heet ***discontinu i***n het punt met $x = 1$.
Verder volgt uit $\boldsymbol{x = 0} \Rightarrow \boldsymbol{y = 4}$ en uit $\boldsymbol{y = 0} \Rightarrow 2x - 4 = 0$ dus $\boldsymbol{x = 2}$ zodat de grafiek de x-as snijdt in het punt (2,0) en de y-as in (0,4).

Plot je de functie in de GR, dan blijkt de grafiek te bestaan uit twee krommen die je (na kegelsneden op blz.168) zult herkennen als de *twee takken* van *een hyperbool.*
Je ziet dat *bij toenemende* $|x|$ (dus x naar rechts of naar links toenemend), *rechter- en linkertak naderen tot de lijn* $y = 2$ hetgeen als volgt is te bewijzen:

Deel je teller en noemer van $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$ door x, dan ontstaat $f(x) = \frac{\frac{1}{x}(2x-4)}{\frac{1}{x}(x-1)} = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ …(1)

Als hierin x tot oneindig nadert, dan naderen $\frac{4}{x}$ en $\frac{1}{x}$ tot nul zodat (1) overgaat in

$f(x) = \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$. In wiskundige termen: $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{x-1} = 2}$ (Volgt op blz. 37).

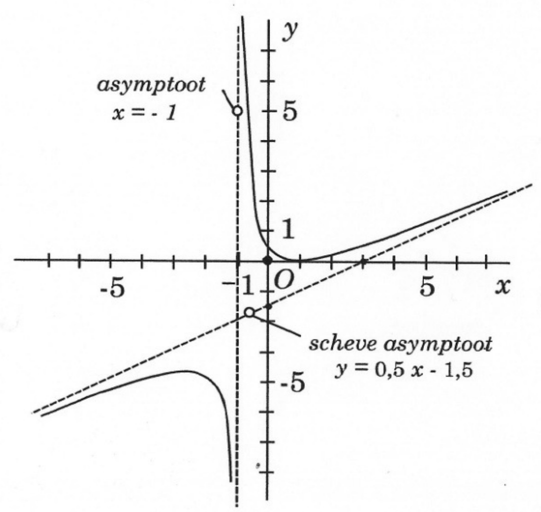
De lijn y = 2 heet nu een ***horizontale asy***mptoot van de functie $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}}$
Zo is ook aan te tonen dat *bij toenemende* $|y|$ beide takken *naderen tot de lijn* $x = 1$.
De functie heeft dus ook een ***verticale asymptoot*** $\boldsymbol{x = 1}$ **.** Gr .'symptootos' = samenvallend).

Toelichting asymptoten:

Een *asymptoot van een functie* is in het algemeen een ***lijn*** $\boldsymbol{y = ax + b}$ waartoe de kromme $\boldsymbol{y = f(x)}$ steeds dichter nadert, zonder hem ooit te bereiken. We onderscheiden ***horizontale, verticale en scheve asymptoten.*** Hoe dichter x en of y tot *oneindig naderen* , hoe dichter de (grafiek van) $y = f(x)$ tot de *lijn* $y = ax + b$ nadert.
In het geval hierboven zijn dus de *horizontale asymptoot* $\boldsymbol{y = 2}$ en de *verticale asymptoot* $\boldsymbol{x = 1}$ twee asymptoten van de functie $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{2x-4}{x-1}}$.
In de volgende opgave wordt een *scheve asymptoot* berekend.

2. $\boldsymbol{f(x) = \frac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}}$

Omdat de noemer van de breuk bij $x = -1$ de waarde nul aanneemt, is de functie voor dat punt niet gedefinieerd. Je ziet dan ook dat de grafiek van $f(x)$ onderbroken is in $x = -1$
De functie is dus *discontin**u*** in $x = -1$.



- Het *snijpunt met de y-as* is het punt met $x = 0$
en $y = \dfrac{0{,}5\,(0-1)^2}{0+1} = 0{,}5$, dus het punt (0; 0,5).

- Een *snijpunt met de x-as* is het punt met
$y = 0$, dus als $\dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1} = 0$ ofwel:
$0{,}5\,(x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$ (dubbeltellend)
twee *samenvallende wortels*: $\boldsymbol{x = 1.}$
Punt (1, 0) is dan *raakpunt* van $f(x)$ aan de x-as.

1⁰. De grafiek heeft een verticale asymptoot in het punt met $x = -1$. Bewijs:

Als x *van links* nadert tot -1, zeg $x = -1-\delta$ dan nadert de *noemer* van $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}}$ tot
$(-1-\delta)+1 = -\boldsymbol{\delta}$ [*)]
De waarde van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan tot $-\infty$ dus $x = -1$ *is een (verticale) asymptoot van de linkertak van de hyperbool.*

2⁰. Ook van de rechtertak is de lijn $x = 1$ een asymptoot want als x van rechts nadert tot -1 zeg $x = (-1 + \delta$, dan nadert de noemer van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ tot) + 1 = $\boldsymbol{\delta}$ dus tot 0.
De waarde van $f(x) = \dfrac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ nadert dan ***van rechts*** tot $+\infty$ dus $x = -1$ *is tevens asymptoot van de rechtertak van de hyperbool.*

- Omdat een eventuele limiet van $f(x) = \frac{0{,}5\,(x-1)^2}{x+1}$ als x *tot plus of min oneindig nadert* niet direct is te berekenen, herleiden we de functie: door een *staartdeling* uit te voeren:

$$
\begin{array}{rrrrl}
x+1 \;/ & 0{,}5\,x^2 & -\;x & +\;0{,}5 & \backslash\;\; 0{,}5\,x - 1{,}5 \\
 & 0{,}5\,x^2 & +\;0{,}5\,x & & \\
\hline
 & & -1{,}5\,x & +\;0{,}5 & \\
 & & -1{,}5\,x & -\;1{,}5 & \\
\hline
 & & & 2 &
\end{array}
$$

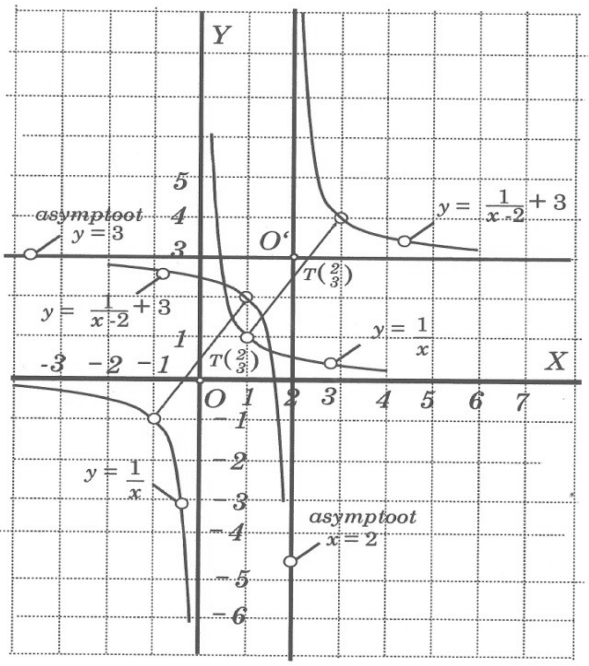
dus is de gegeven functie gelijkwaardig met:
$$\boldsymbol{y = 0{,}5\,x - 1{,}5 + \frac{2}{x+1}}.$$

De limiet hiervan als x tot oneindig nadert is dan $y = 0{,}5\,x - 1{,}5$ omdat $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$
De lijn met vergelijking $\boldsymbol{y = 0{,}5\,x - 1{,}5}$ is nu *een **scheve asymptoot*** van de gegeven functie.

---

[*] Het getal δ (delta) wordt algemeen gebruikt om een zeer kleine, (tot nul naderende) positieve waarde, aan te geven
.

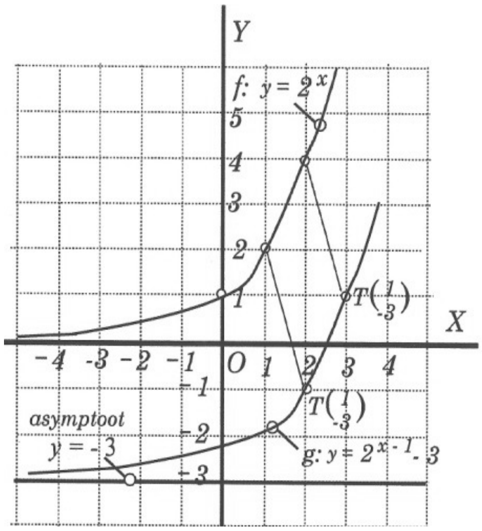
3. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-2} + 3}$



De grafiek van deze gebroken rationale functie (dus een hyperbool) ontstaat door de translatie $\boldsymbol{T\,(2,3)}$ toe te passen op de *standaardhyperbool g:* $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ volgens de translatietransformatie-regel (blz.13).
Horizontale asymptoot van ***g:*** $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ is de x-as met vergelijking $\boldsymbol{y = 0}$, verticale asymptoot is de y-as met vergelijking $\boldsymbol{x = 0}$.
Bij de translatie $T(2,3)$ gaat de oorsprong O over in O' dus de vergelijking $\boldsymbol{y} = 0$ over in $y = 0 + 3 = \boldsymbol{3}$ en de vergelijking $x = 0$ in $\boldsymbol{x} = 0 + 2 = \boldsymbol{2}$
Van $f\,\boldsymbol{(x)} = \frac{1}{x-2} + 3$ is de lijn $\boldsymbol{y = 2}$ dan *horizontale asymptoot en* $\boldsymbol{x = 2}$ de *verticale asymptoot* .

7. *Grafieken van exponentiële functies*

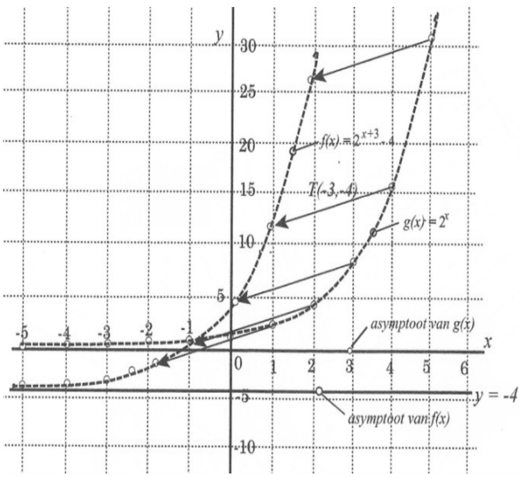
1. $\boldsymbol{f(x) = 2^{x-1} - 3}$



Deze exponentiële functie ontstaat uit de standaardfunctie *g:* $y = 2^{x}$ via de translatie $\boldsymbol{T\,(1,-3)}$.
Horizontale asymptoot van f: $y = 2^{x}$ is de x-as, dus de lijn $y = 0$, de *horizontale asymptoot* van g: $y = 2^{x-1} - 3$ is dan: $\boldsymbol{y} = 0 - 3 = \boldsymbol{-3}$.
Er is geen verticale asymptoot want $\lim_{x\to\infty} 2^{x}$ bestaat niet.

Het *domein* van f (alle waarden van x waarvoor de functie 2^{x} is gedefinieerd) is $\mathbb{R}$, dus is $\mathbb{R}$ ook het *domein van g.*
Het bereik van f (alle functiewaarden die 2^{x} kan aannemen) is $(0, \rightarrow)$, dus is $\boldsymbol{\langle -3, \rightarrow \rangle}$ het *bereik van g***.**

2. $\boldsymbol{f(x) = 2^{x+3} - 4}$



a. Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaard-grafiek van een exponentiële functie?
b. Bepaal het domein en het bereik van f .

De exponentiële functie $f(x) = 2^{x+3} - 4$ ontstaat uit de standaardfunctie $g(x) = 2^{x}$ via de translatie $T(-3,-4)$.
Volgens voorgaande opgave is het domein van $g(x) = 2^{x} = \mathbb{R}$ dus is ook $\mathbb{R}$ **het *domein van f*** **:** $y = 2^{x+3} - 4$
Het bereik van $g\,(x) = 2^{x}$ is $\langle 0, \rightarrow \rangle$, dus van f : $y = 2^{x+3} - 4$ is het ***bereik*** $\boldsymbol{\langle -4, \rightarrow \rangle}$

Logaritmische functies

a. Logaritme van een getal

Exponentiële vergelijkingen zoals bij voorbeeld $17^x = 500$ kan je na voorgaande theorie nog niet exact oplossen. Alleen door 'proberen' met een rekenmachine is een *benadering* mogelijk.

Men heeft daartoe de *logaritme van een getal* ingevoerd.
De Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630) besloot alle *positieve getallen* als een ***macht van tien*** te schrijven. De *exponenten* van deze machten noemde hij ***logaritmen***, dus de *logaritme* van een getal a is de *exponent p waarvoor* $10^p = a$.
Definitie: $\boldsymbol{\log a = p}$ **als** $\boldsymbol{10^p = a}$.

Zo is bijvoorbeeld $100 = 10^2$ dus de logaritme van 100 = 2. Notatie: $\log 100 = 2$.
$1000 = 10^3$ dus $\log 1000 = 3$; $1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$; $0{,}001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0{,}001 = -3$
De logaritmen van getallen $\boldsymbol{a}$ met $\boldsymbol{a \leq 0}$ ***bestaan niet*** want er is *geen getal p* waarvoor $10^p = a$ als $a \leq 0$. (Immers: Elke positieve of negatieve macht van 10 is groter dan 0)
Briggs berekende de logaritmen van alle viercijferige getallen en verzamelde ze in 'logaritmetafels'. Zo ontstonden de ***Briggse logaritmen***, met als ***grondtal*** het getal **10** [*)]

Niet alleen het getal tien kan als *grondtal g* voor logaritmen dienen, maar in feite *elk* ***positief reëel*** *getal* **mits ≠ 1.**
Omdat bijvoorbeeld $9 = 3^2$ kan men met *als grondtal* 3 zeggen: $\log 9 = 2$.
Om verwarring te voorkomen schrijft men dan ${}^3\log 9 = 2$.
Zo is ${}^5\log 125 = 3$ want $5^3 = 125$; ${}^{1/3}\log \frac{1}{27} = 3$, want $(1/3)^3 = \frac{1}{27}$, etc.
Men definieert dan: $\boldsymbol{{}^g\log a = x}$ ***als*** $\boldsymbol{g^x = a}$ ($g > 0$ als grondtal van een exponentiële functie volgens blz.15). Omdat $g > 0$ is dan ook $a > 0$ dus **als** $\boldsymbol{a \leq 0}$ ***dan bestaat*** $\boldsymbol{{}^g\log a}$ ***niet***

Definitie:

> *De ^{g} logaritme van een getal a is gedefinieerd door*: $\boldsymbol{{}^g\log a = x}$ als $\boldsymbol{g^x = a}$ (a *en* $g > 0$, $g \neq 1$)

De wiskundige John Napier (1707-1783) voerde veel later voor *het grondtal* $\boldsymbol{g}$ van de logaritmen het '***Getal van Euler***' $\boldsymbol{= e}$ in. ($e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2{,}718281828\ldots$)
Logaritmen met dit grondtal noemt men Neperiaanse- of *natuurlijke logaritmen* omdat de waarde ervan een grote rol speelt in veel natuurprocessen.
Notatie voor logaritmen *met grondtal e* is $\boldsymbol{\ln x}$, dus $\boldsymbol{\ln x = {}^e\log x}$.

> *Log x is de Briggse logaritme van x met* 10 *als grondtal, dus* $\log x = {}^{10}\log x$,
> *ln (x) is de natuurlijke logaritme van x met e als grondtal dus* $\ln x = {}^e\log x$.
> *Als* $\log x = p$, *dan is* $10^p = x$, *als* $\ln x = p$ *dan is* $e^p = x$.
> *De waarde van een logaritme met grondtal g is dus in feite de exponent van een g-macht*

[*)] Zo berekende Briggs *handmatig* 27 *wortels uit* 10: De wortel uit 10 daarna de wortel uit de uitkomst daarvan en daaruit weer de wortel et cetera. Alles in *zestien decimalen* nauwkeurig!. Omdat $\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3{,}16227766\ldots$, is $\log 3{,}16227766\ldots = 0{,}5$; $\sqrt{3{,}16277766} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1{,}77827941\ldots$ dus $\log 1{,}77827941\ldots = 0{,}25$ enz..
En dat was nog maar een begin…

b. Eigenschappen van logaritmen

Voor elk positief grondtal g en alle positieve waarden voor a en b gelden de regels:

$$
\begin{array}{ll}
1.\ {}^{g}log\,ab & = {}^{g}log\,a + {}^{g}log\,b \\
2.\ {}^{g}log\,\frac{a}{b} & = {}^{g}log\,a - {}^{g}log\,b \\
3\ \ {}^{g}log(a^{n}) & = n.\,{}^{g}log\,a \\
4a\ \ {}^{g}log(g^{x}) = x\ \ en\ \ 4b\!:\ g^{{}^{g}log\,x} = x &
\end{array}
$$

Bewijs:

1. Noem ${}^{g}log\,a = p$ en ${}^{g}log\,b = q$ dan is per definitie $g^{p} = a$ en $g^{q} = b$ met gevolg: $\boldsymbol{ab} = g^{p}.\,g^{q} = \mathbf{g^{p+q}}$, zodat ${}^{g}log\,ab = p + q$ dus: $\boldsymbol{{}^{g}log\,ab = {}^{g}log\,a + {}^{g}log\,b}$.

2. Noem ${}^{g}log\,a = p\ en\ {}^{g}log\,b = q$ dan is $g^{p} = a$, $g^{q} = b$ dus $\frac{a}{b} = \frac{g^{p}}{g^{q}} = g^{\,p-q}$ zodat ${}^{g}\log\frac{a}{b} = p - q \Rightarrow \boldsymbol{{}^{g}log\,\frac{a}{b} = {}^{g}log\,a - {}^{g}log\,b}$.

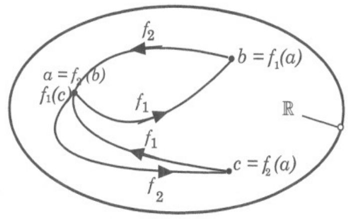
3. Als ${}^{g}log\,a = p$ dan $g^{p} = a$ en $a^{n} = (g^{p})^{n} = g^{n.p} \Rightarrow {}^{g}log(a^{n}) = n.\,p = n.\,{}^{g}log\,a$ dus $\boldsymbol{{}^{g}log(a^{n}) = n.\ {}^{g}log\,a}$

4*a*. ${}^{g}log(g^{x}) = x\,.\,{}^{g}log\,g$ (volgens 3) $= x\,.\,1 = x$ (want ${}^{g}log\,g = 1$ omdat $\mathbf{g^{1} = g}$) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{{}^{g}log(g^{x}) = x.}$

4b. Noem ${}^{g}log\,x = p$ dan $g^{\,p} = x$ zodat $g^{\,glog\,x} = g^{\,p} = x \Rightarrow \boldsymbol{g^{\,{}^{g}log\,x} = x.}$

c. ***Inverse functies***

Het *argument x* van een functie $f(x)$ kan zelf een functie $g(x)$ *van x* zijn zodat $f(x) = f(g(x))$.
Punt $\boldsymbol{a}$ wordt in de figuur door de functie f_1 afgebeeld op het punt b dus $\boldsymbol{b = f_1(a)}$.
Stel nu dat het f_1 *beeld* b van a , *dus* $= f_1\,\boldsymbol{(a)}$ door de functie f_2 wordt 'terug' afgebeeld op a, dan is $\boldsymbol{f_2(b) = f_2(f_1(a)) = f_2\,f_1(a)} = a$. ...(1)
Door de functie $\boldsymbol{f_2}$ wordt het punt a afgebeeld op c, zodat $\boldsymbol{c = f_2(a)}$.
Stel nu dat ook dit $\boldsymbol{f_2}$ *-beeld* c van a door de functie f_1 weer wordt 'terug' afgebeeld op a, dan is dus is $\boldsymbol{f_1(c) = f_1(f_2(a)) = f\ f_2(a) = a}$. ...(2)
Volgens (1) en (2) geldt dan voor de functies f_1 en $\boldsymbol{f_2}$ dat



$\boldsymbol{f_1\,f_2(a) = f_2\,f_1(a) = a.}$
Als dit geldt voor alle punten x = a binnen het domein **van** f_1 en $\boldsymbol{f_2}$ (hier ℝ), dan zijn $\boldsymbol{f_1}$ en $\boldsymbol{f_2}$ elkaars ***inverse functies.***

Zijn f en g twee functies in ℝ waarbij voor elk element x geldt dat
f (g(x)) = g (f(x)) = x dan zijn f en g elkaars inverse functies

Zo zijn machtsverheffen $f(x) = x^{p}$ en worteltrekken $g(x) = \sqrt[p]{x}$ elkaars inverse functies, want voor elk getal x is $\boldsymbol{f(g(x))} = f(\sqrt[p]{x}) = (\sqrt[p]{x})^{p} = \boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{g(f(x))} = g(x^{p}) = \sqrt[p]{x^{p}} = \boldsymbol{x}$**.** Ook geldt als $f(b) = a$ dan is $g(a) = b$ dus als $f(x) = \boldsymbol{f(4) = 4^{p}}$ dan is $g(x) = \mathbf{g(4^{p})} = \sqrt[p]{4^{p}} = \mathbf{4}$**.**

Eigenschap:

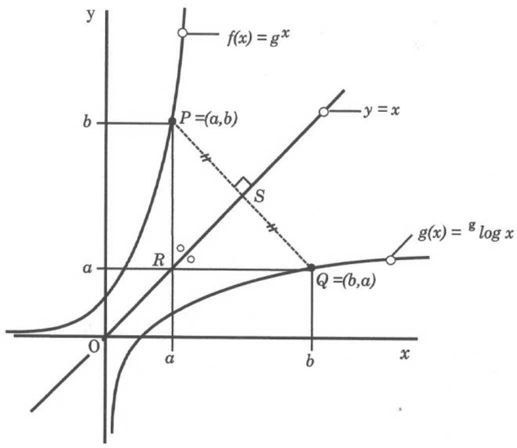
De logaritmische functie f(x) = ${}^{g}log\,x$ *en de exponentiële*
functie h(x) = g^{x} *zijn elkaars inverse functies*

Bewijs:
Noem $f(x) = {}^g\log x$ en $h(x) = g^x$ dan is: $\boldsymbol{f(h(x))} = f(g^x) = {}^g\log(g^x) = \boldsymbol{x}$ (eig. 4a) ...(1)
Ook is $\boldsymbol{h(f(x))} = h({}^g\log x) = \mathbf{g}^{{}^g\log x} = \boldsymbol{x}$ (eigenschap 4b) ...(2)
Uit (1) en (2) volgt dan $\boldsymbol{f(h(x)) = h(f(x)) = x}$ dus zijn $f(x) = {}^g\log x$ en $h(x) = g^x$ per definitie elkaars ***inverse functies.*** *)

NB: Kies je voor het *grondtal g van de logaritme* en het *grondtal g van de macht* het getal e van Euler dan blijkt hieruit dat ook ${}^e\log x = \mathbf{ln}\,(x)$ en $\mathbf{e}^x$ elkaars inverse functies zijn.

Als f en g elkaars inverse functies zijn,
dan zijn de grafieken van f en g elkaars spiegelbeeld in de lijn y = x

Bewijs:
Getekend zijn de grafieken van de functies $f(x) = g^x$ en zijn inverse $g(x) = {}^g\log x$.
$P(a,b)$ is een *willekeurig punt* van $f(x)$ met $\boldsymbol{f(a) = b}$.
Omdat *g(x) de inverse functie is van f(x)* ligt er een punt $Q = (b,a)$ op $g(x)$ dus met $\mathbf{g(b)} = \boldsymbol{a}$. Verder geldt:
$PR = QR = |\,b - a\,|$, dus $\Delta\,PRQ$ is gelijkbenig.
De lijn $y = x$ gaat door R, want R is het punt (a,a).
en omdat QR en PR evenwijdig zijn met resp. de x-as en de y-as is $\Delta\,PRQ$ rechthoekig in R.
Verder maakt de lijn $y = x$ gelijke hoeken met de x-as en de y-as, dus ook met RQ en RP zodat RS (op $y = x$) middelloodlijn is van PQ, met gevolg:
P en Q zijn *elkaars spiegelbeeld* in de lijn $y = x$.



Omdat $P(a,b)$ een willekeurig punt is op $f(x)$ geldt dit voor alle punten van f en g dus:
f en g zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn y = x als f en g elkaars inverse functies zijn.

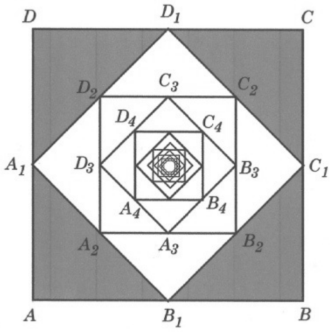
Opgaven:

1. *Bewijs dat algemeen geldt:* ${}^g\log x = \dfrac{\log x}{\log g}$. *(eigenschap 5)*

Noem ${}^g\log x = p$ dan is $\boldsymbol{x} = \mathbf{g}^{\boldsymbol{p}}$. Noem $\log x = q$ dan is $\boldsymbol{x} = \mathbf{10}^{\boldsymbol{q}}$ zodat $g^{\boldsymbol{p}} = \mathbf{10}^{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{x}$ ...(1)
Noem $\log g = r$, dan $g = 10^r$ zodat $x = g^p = (10^r)^p = \mathbf{10}^{\boldsymbol{rp}} = \mathbf{10}^{\boldsymbol{q}}$ volgens (1)
dus $r.\,p = q \Rightarrow p = \dfrac{q}{r}$ ofwel ${}^g\boldsymbol{\log x} = \dfrac{\mathbf{log}\ \boldsymbol{x}}{\mathbf{log\ g}}$.
Dankzij deze eigenschap kunnen logaritmen met *elk willekeurig grondtal g* met de GR via Briggse logaritmen (grondtal = 10) berekend worden. Bij voorbeeld: ${}^3\log 17 = \dfrac{\log 17}{\log 3} = \mathbf{2{,}5789}$

*) Omdat voor elke x van het domein van twee inverse functies f en g geldt dat $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ vormen de samengestelde functies $f(g(x))$, kortweg f g (x)) en $g(f(x))$ (= $g\,f\,(x)$) een ***identiteit E*** dus **f g** $(x) = gf\,(x) = E\,x$, waarin $E = 1$ in algebraïsche functies. In veel wiskundeboeken noteert men daarom twee inverse functies als f en f^{-1}. In deze notatie geldt dan : $f\ f^{-1}(x) = f^{-1}f\,(x) = E\,x = x$

2. De middens van de zijden van een vierkant *ABCD* zijn de hoekpunten van vierkant $A_1B_1C_1D_1$. De middens van $A_1B_1C_1D_1$ zijn weer de hoekpunten van vierkant $A_2B_2C_2D_2$ en zo verder volgens onderstaande figuur. De zijde van *ABCD* = 8.
Bij welke index *n* zal de oppervlakte van vierkant $A_nB_nC_nD_n$ kleiner zijn dan 0,001?



De oppervlakte van *ABCD* = 8^2 = 64, de oppervlakte van $A'B'C'D'$ = ½ × O_{ABCD} en ook van *elk volgend vierkant* is steeds de oppervlakte de helft van die van het vorige vierkant.
Van $A_nB_nC_nD_n$ is dan $O = 64 \times (½)^n$.
Je berekent nu wanneer $O = 64 \times (½)^n = 0{,}001$ uit de vergelijking **log (64 × (½)^n) = log 0,001 = −3.** (1)
Omdat log ab = log a + log b en log a^n = n. log a volgt uit (1):
log 64 + n. log ½ = – 3 ⇒ 1,80168 + n. – 0,30103 = −3 ⇒
4, 80168 = – 0,30103 n ⇒ $\boldsymbol{n}$ **= 15,9** ⇒
De oppervlakte van $\boldsymbol{A_{16}B_{16}C_{16}D_{n16}}$ is kleiner dan 0,001). De gevraagde **index n** is dus **16**.
Controle: **64 × (½)^{16} = 0,000976** (< 0,001) en **64 × (½)^{15}= 0,001953** (> 0,001).

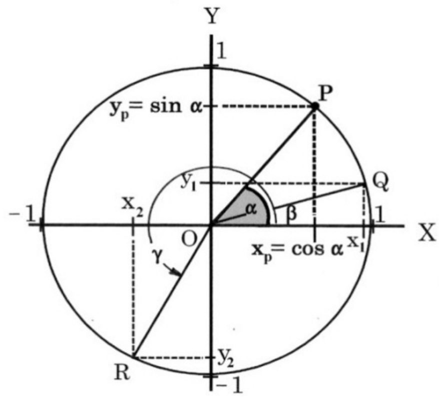
9. *Goniometrische functies*

a. Definities in de eenheidscirkel

In de hoekmeetkunde worden *sinus, cosinus* en *tangens* van ***hoeken* < 90°** gedefinieerd als de *verhoudingen van twee zijden in een rechthoekige driehoek.* (blz.142). Per definitie is dan

sinus (sin α) = $\dfrac{overstaande\ rechthoekszijde}{schuine\ zijde}$, ***cosinus*** (cos α) = $\dfrac{aanliggende\ rechthoekszijde}{schuine\ zijde}$ en

tangens α (tan α) = $\dfrac{overstaande\ rechthoekszijde}{aanliggende\ rechthoekszijde}$.



Om sinus en cosinus te definiëren voor elke ***willekeurige hoek α*** heeft men de '***eenheidscirkel***' ingevoerd, een cirkel met ***straal R =* 1** en middelpunt *O* in de oorsprong van het *XOY* stelsel. Elke hoek α wordt daarin voorgesteld door de hoek *XOP* die het ***'vaste been'*** *OX* maakt met de '***voerstraal'*** *OP* van∠*XOP*. Zo is dan α = 0 als voerstraal *OP samenvalt met OX.* Als α **> 0** dan wordt *OP* vanuit *OX* om *O over de hoek* α *geroteerd* ***in tegenwijzerzin;*** als α **< 0**, dan wordt *OP* vanuit *OX* om *O over de hoek* α *geroteerd* ***in wijzerzin.***
Sin α **en cos** α zijn nu gedefinieerd als *de coördinaten van het eindpunt P*(x_p, y_p) van de voerstraal *OP* en wel zo dat $\boldsymbol{x_p}$ = **cos** α en $\boldsymbol{y_p}$ = **sin** α
Omdat nu α *elke reële waarde* **α + 2 *k*.π (*k*∈ℤ)** kan aannemen is het *domein* van sin α en cos α = ℝ ,het *bereik* is [−1,1]

> *Sinus α en cosinus α zijn gedefinieerd als de coördinaten van het eindpunt P van de voerstraal OP van de hoek α in de eenheidscirkel .* (α ∈ ℝ).
> *Er geldt: sinus α = de 'ordinaat'* y_p, *cosinus α = de 'abscis'* x_p

Voorbeelden: Van ∠*XO*P = α zijn **sin** α = $\boldsymbol{y_p}$ en **cos** α = $\boldsymbol{x_p}$ getekend: **cos** ∠XOQ = cos β = $\boldsymbol{x_1}$, sin ∠XOQ = sin β = $\boldsymbol{y_1}$**;** cos ∠XOR = cos γ = $\boldsymbol{x_2}$, sin ∠XOR = sin γ = $\boldsymbol{y_2}$. Lees ook af: sin 90 = 1, cos 90° = 0, sin 180° = 0, cos 180° = −1, sin 270° = sin (−90°) = −1, cos 270° = cos (−90°) = 0, sin(360° = sin 0° = 0, cos 360° = cos 0° = 1.

De ***tangens*** van hoek α in een rechthoekige driehoek wordt gedefinieerd als de verhouding $\frac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}}$ van α. Overeenkomstig hiermee geldt per definitie in de eenheidscirkel: tan α = $\frac{y_p}{x_p}$ $(x_p \neq 0)$ dus voor *elk reëel getal* α geldt:

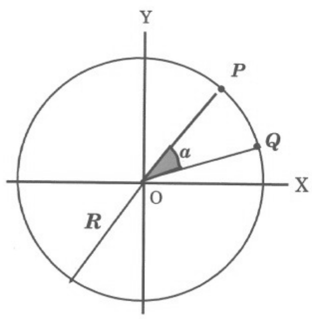
tan α= $\mathbf{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ (cos α ≠ 0, dus **α≠90° + *k*. 180°).** Het bereik van tan α= ℝ .

NB: *De* functies sin *x en* cos *x zijn geen* **'1-1 *afbeeldingen*'**, dat wil zeggen*: sin* 30° = 0,5 *betekent* ***niet: Als*** *sin x* = 0,5 ***dan is*** *x* = 30°. Immers als *sin x* = 0,5 dan maakt de voerstraal een hoek van 30° met de positieve X, as, maar dat is ook zo nadat de voerstraal over $k \times 360°$ ($k \in \mathbb{Z}$) om *O* gedraaid is, en ook is sin *x* = 0,5 als *x* = 150°.
Zo is cos 30° = $\sqrt{3}/2$ maar ook cos (30° + k × 360°) en cos (−30°) = $\sqrt{3}/2$.

b. De eenheid radiaal

De ***standaardeenheid*** van hoekgrootten in de wiskunde is **één *radiaal.***

Een hoek van 1 *radiaal is de grootte van de middelpuntshoek die een cirkelboog onderspant waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel*



De grootte van een hoek in radialen is dus gelijk aan de verhouding $\frac{\textit{lengte} \text{ van de bijbehorende cirkelboog van een middelpuntshoek}}{\textit{lengte} \text{ van de straal } R \text{ van de cirkel}}$

De ***dimensie*** van de radiaal is dan $\frac{[m]}{[m]}$ **= 1.** *)

De *cirkel (straal* = *R*) heeft een booglengte (= omtrek) van = 2π.*R*, dus hoort hierbij een middelpuntshoek in radialen van $\frac{2\pi.R}{R} = 2\pi$

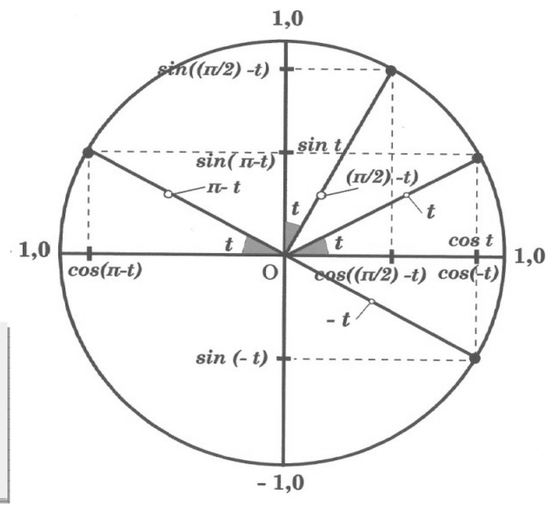
met gevolg: **360° = 2π.** Als $PQ = \frac{3}{4}R$ dan is $\angle$***POQ*** **= α =** $\frac{\frac{3}{4}R}{R} = \mathbf{\frac{3}{4}}$**.**

hoek α in radialen	2 π	3 π/2	π	π/2	1	π / 180
hoek α in graden	360 °	270 °	180 °	90 °	180 / π °	1°

c. Herleidingformules

Vaak worden in de *goniometrie* ('hoekmeetkunde') *herleidingformules* gebruikt, zoals die
- voor het ***complement*** van een hoek (aanvulling tot 90° = π /2 radialen), voor het ***supplement*** van een hoek (aanvulling tot 180° = π radialen), voor *dubbele- en halve* hoeken en voor *som of verschil* van twee hoeken.

Uit de getekende eenheidscirkel kan je al direct aflezen:



$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \cos(-t) = \cos t$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$
$$\sin(\pi - t) = \sin t \qquad \cos(\pi - t) = -\cos t$$

*) Je spreekt daarom niet van een hoek φ van bijv. 5 *radialen*, maar **kortweg van φ = 5**.
In de GR-TI83 kan je de eenheid van hoeken instellen op graden (Degrees) of *radialen* (*Radians*).
va de knop MODE. Standaard laat je die instelling meestal op radialen staan.

Ook volgt direct uit de definitie van sin t en cos t de eigenschap:

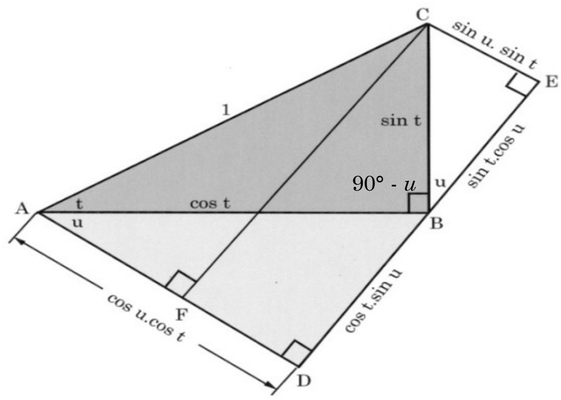
$$sin^2(t) + cos^2(t) = 1$$

Immers:
Volgens *Pythagoras* geldt voor de coördinaten x_p, y_p van punt P van de voerstraal in de eenheidscirkel, dat: $x_p{}^2 + y_p{}^2 = OP^2 = R^2 = 1$, zodat $\mathbf{sin^2\, t + cos^2\, t = 1}$ *)

- *Sinus en cosinus van som en verschil*

1. $sin\,(t+u) = sin\,t\,.\,cos\,u + cos\,t\,.\,sin\,u$
2. $cos\,(t+u) = cos\,t\,.\,cos\,u - sin\,t\,.\,sin\,u$
3. $sin(\,t-u\,) = sin\,t\,.\,cos\,u - cos\,t\,.\,sin\,u$
4. $cos\,(t-u\,) = cos\,t\,.\,cos\,u + sin\,t\,.\,sin\,u$
5. $tan\,(t+u\,) = \dfrac{tan\,t\ +\ tan\,u}{1 - tan\,t.\,tan\,u}$

Bewijs:



1. In de figuur zijn de rechthoekige driehoeken $\Delta\, ABC$ en $\Delta\, ADB$ getekend waarin $\angle BAC = t$, $\angle BAD = u$ en $|AC| = 1$
Zijde DB van $\Delta\, ADB$ is verlengd met BE *en is* de rechthoekige $\Delta\, BEC$ ontstaan.
Omdat in $\Delta\, ADB$: $\angle ABD = 90° - u$, geldt in $\Delta\, BEC$ dat $\angle CBE = 180° - (90° - u) - 90° = u$.
In $\Delta\, BEC$ is $BE = BC.\,cos\,u$ en omdat in $\Delta\, ABC = BC = 1.\,\sin t$ is dan $\boldsymbol{BE = sin\,t.\,cos\,u}$ …(a)
In $\Delta\, ADB$ *is* $BD = AB.\,\sin u$ en in $\Delta\, ABC = AB = 1.\cos t$ zodat $\boldsymbol{BD = cos\,t.\,sin\,u.}$ …(b)
Hulplijn $CF \perp AD$, dus CF // ED.
Uit $\Delta\, AFC$ met CF loodrecht op AD, volgt dat sin $\angle CAF =$ **sin** $\boldsymbol{(t+u)} = CF/1 = DE = \boldsymbol{BE + BD}$
dus volgens (a) en (b): $\boldsymbol{sin\,(t+u) = sin\,t\,.\,cos\,u + cos\,t.\,sin\,u}$ zoals was te bewijzen.

2. In de figuur in $\Delta\, AFC$ is cos $\angle CAF =$ **cos** $\boldsymbol{(\,t+u)} = AF/AC = AF/1 = \boldsymbol{AF}$.
Ook is: $AF = AD - DF = AD - CE$ zodat $AF =$ **cos** $\boldsymbol{(\,t+u) = cos\,u\,.\,cos\,t - sin\,u\,.\,sin\,t.}$

3. Vervang je u door $-u$ in eigenschap 1. dan ontstaat
$\sin(t + (-u)) = \sin t\,.\,\cos(-u) + \cos t\,.\,\sin(-u)$ waarin $\cos(-u) = \cos u$ en $\sin(-u) = -\sin(u)$,
dus $\boldsymbol{sin\,(\,t-u\,) = sin\,t\,.\,cos\,u - cos\,t\,.\,sin\,u.}$

4) Zo volgt uit eigenschap 2.: $cos\,(t-u\,) = \cos(\,t + (-u)) = \cos t\,.\,\cos(-u\,) - \sin t\,.\,\sin(-u)$
dus: $\boldsymbol{cos\,(t-u\,) = cos\,t\,.\,cos\,u + sin\,t\,.\,sin\,u.}$

5) $\boldsymbol{tan\,(\,t+\,u) = \dfrac{tan\,t + tan\,u}{tan\,t\,.\,tan\,u}}$ bewijs zie blz.28, opgave 2 .