ANN DOOMS

WISKUNDE

EEN WANDELING IN DE WONDERE WERELD VAN DE MATHEMATICA

BORGERHOFF & LAMBERIGTS

The beauty of mathematics only shows itself
to more patient followers.

— Maryam Mirzakhani, 1977-2017

INHOUD

VAN BUFFET TOT BEWIJS

The proof of the pudding is in the eating.

— *William Camden, 1551-1623*

'Wiskunde' heet dit boek. Iedereen kent het woord, maar weet iedereen ook wat het eigenlijk betekent? Waarover gaat dit boek? Voor een kind staat wiskunde meestal gelijk aan rekenen, terwijl een tiener denkt aan goochelen met letters en worstelen met intimiderende integralen. Volwassenen hebben dan weer vaak het gevoel dat ze al die wiskunde van vroeger nooit meer nodig hebben gehad. Niemand ontkomt aan wiskunde, maar weinigen krijgen de gelegenheid – of de eer, zou ik zelfs durven zeggen – om te mogen kennismaken met wat het vak allemaal inhoudt. Wiskunde valt namelijk moeilijk te definiëren, tot grote spijt van de wiskundige, die vooral houdt van precisie. Hij zal elke uiteenzetting beginnen met de definities van de gebruikte concepten. En laat de definitie van wiskunde voor mij nu net het moeilijkste zijn in dit boek.

Ik begin dan maar met de betekenis van het woord zelf. Het staat letterlijk voor de kunst van het gewisse of het zekere en werd bedacht door de Brugse wiskundige Simon Stevin (1548-1620). We verkiezen het nog steeds boven mathematica, dat zijn oorsprong vindt in het Grieks waar het 'dat wat geleerd wordt' betekent. De mens leert van kleins af aan uit observatie. Zo imiteren we andere mensen en trachten we verschijnselen rondom ons te begrijpen. Stevins leuze was 'Wonder en is gheen wonder'. Wanneer verschijnselen ons verwonderen, zal je volgens hem het antwoord vinden in de wiskunde en dit door patronen in je observaties te zoeken. Doorheen de eeuwen zien we dat het merkwaardig goed lukt om verschijnselen in een formule te gieten. Zo formuleerde de Engelse Sir Isaac Newton (1642-1727) er onder andere zijn universele wetten voor de zwaartekracht mee, waardoor we nu kunnen berekenen hoe snel een appel naar beneden valt of hoe planeten bewegen. Wiskunde wordt daarom ook wel de taal van het universum genoemd. Maakt haar dat dan tot de kunst van het zekere waar Stevin op doelde? Nee, want het is niet omdat we een formule kunnen vinden die onze observaties verklaart, dat we hiermee de waarheid in pacht hebben. Zo ontdekte Albert Einstein (1879-1955) begin 20e eeuw dat Newtons formules niet altijd kloppen, waaruit vervolgens de relativiteitstheorie werd geboren. Ontdekkingen binnen de wiskunde zijn echter wel altijd waar. Wiskunde is de wetenschap die zoekt naar de waarheid én is ook de enige die ze kan vinden. Hierrond draait dan ook dit eerste hoofdstuk.

In het algemeen zullen wetenschappers na het uitgebreid observeren van verschijnselen een hypothese naar voren schuiven, een soort wet waarvan men denkt dat die het verschijnsel kan beschrijven. Men voert dan bijkomende, meer gerichte experimenten uit om de hypothese kracht bij te zetten. Om als het ware bewijslast te vinden, zodat de wetenschapper kan zeggen: ‘Zie je wel, ik had het bij het rechte eind.’ De experimenten zullen hem tijdens dit proces ook helpen om zijn hypothese te verfijnen of bijstellen of soms zelfs doen besluiten dat hij er helemaal naast zat. Om dan van meet af aan te herbeginnen. Wanneer een wetmatigheid gevonden lijkt, kan ze gebruikt worden om het gedrag van het verschijnsel te voorspellen. Zo verkrijgen we een wetenschappelijke theorie gebaseerd op empirisch onderzoek. In de wiskunde gaan we echter nog een stap verder en staat ‘gelijk hebben’ op dezelfde hoogte als waarheid. Wiskundige resultaten ontketenen geen ellenlange discussies op Twitter. Wiskunde is objectief, maar hoe mensen wiskunde ervaren, is dan weer subjectief. Voor sommigen is dat helaas angst, voor anderen pure schoonheid. Dit laatste hoop ik met dit boek te bewerkstelligen. Ik maak daarom met jou een wandeling doorheen de wiskunde, die steeds vertrekt vanuit de realiteit om zo te komen tot de belangrijkste begrippen uit de wiskunde. We starten bij de verwondering en nieuwsgierigheid die je als kind ervaarde tijdens het opgroeien. Je observeert, imiteert en vraagt je af waarom de dingen zijn zoals ze zijn. Je leert heel snel dat de woorden een, twee, drie, vier… ons dingen helpen tellen. Je krijgt als vanzelf een gevoel voor aantallen (Ik heb twee schoenen), maar ook voor lengtes (Ik heb zo ver gesprongen). Een lengte benoemen is echter niet zo simpel en dit zorgde doorheen de geschiedenis voor heel wat kopzorgen, waaruit uiteindelijk fantastische nieuwe wiskunde ontstond. Tellen en meten liggen nog steeds aan de basis van het begrijpen van onze realiteit. We kunnen er patronen mee ontdekken en daarmee nieuwe dingen

uitvinden. Zo ontstonden verschillende takken binnen de wiskunde met impact ver erbuiten.

Het is onmogelijk om alle facetten van de wiskunde in dit boek te belichten, dus presenteer ik je een buffet. Een keuze van onderwerpen die ik zelf erg kan smaken en begrippen die aan de basis liggen. Ik nodig je uit om al wandelend langs het buffet van verschillende soorten wiskunde te proeven en zo patronen te ontdekken in tellen en meten, waarmee je de wiskunde en de wiskundige beter zal begrijpen. De wandeling is soms pittig, zoals het beklimmen van een steile berg kan zijn. Wiskundige heuvels en bergen herken je als kaderstukjes. Je zal echter steeds kunnen kiezen om de kabellift te nemen en het stukje over te slaan, maar zeg nu zelf, je geniet toch meer van het uitzicht op de top van een berg nadat je er al zwetend en zwoegend aankwam. De beloning is steeds mooier na een inspanning. Daarnaast grappen wiskundigen al eens dat zij enkel een potlood, papier en een kop koffie nodig hebben. Neem dat er ook gerust bij.

IN DEN BEGINNE

Wie vond wiskunde uit, zal je je misschien al afgevraagd hebben. We weten het niet, maar de geschiedenis van de wiskunde gaat zeker terug tot de prehistorie, zo’n 50.000 jaar geleden. We vermoeden dat, net zoals we bij kinderen en zelfs dieren zien, er eerst een aanvoelen van ‘meer’ en ‘minder’ was. Kinderen zijn al zeer snel in staat om te zien of een ander kind meer speelgoed of snacks krijgt, zonder dat ze daarvoor de aantallen kunnen benoemen. Het eerste tellen gebeurde op de vingers, maar daar had je er algauw niet genoeg meer van. Zo werd dan de hulp ingeroepen van misschien eerst nog de tenen, maar daarna zeker stokken en stenen om het aantal dieren of leden van een stam bij te houden. Ze hadden waarschijnlijk ook een notie van tijd, geteld in dagen en maancycli. Eén stok of steen stelde één ander object voor, de eerste vorm van abstractie. Door telkens een stok te matchen met een persoon kon men ontdekken of er een lid ontbrak of was bijgekomen (hmmm, hoe zou dat komen?). Natuurlijk is het bijhouden van een groot aantal stokken of stenen ook weer niet zo handig, want misschien raak je er wel kwijt. Daardoor kwam men uit op het kerven in stokken, stenen of beenderen om aantallen bij te houden. In Afrika vonden we het ongeveer 40.000 jaar oude Lebombo-beentje van een baviaan met 29 markeringen, misschien om de maanstanden bij te houden?

In 1950 vond men in Congo het Ishango-beentje, het kuitbeen van alweer een baviaan, 22.000 jaar oud deze keer. Eerst dacht men dat de inkervingen gewoon dienden om aantallen bij te houden, maar omdat ze in groepjes staan, verdeeld over drie kolommen, vermoeden we dat het beentje het oudste gevonden rekenhulpmiddel is. De relaties tussen de aantallen zijn heel interessant: er staan veelvouden van 2 op, de som van de buitenste kolommen is gelijk aan 60 en we vinden ook priemgetallen terug, dus getallen die enkel deelbaar zijn door 1 en zichzelf. Waren het observaties uit de natuur? Of was het beentje een hulpmiddel om tijdens de vangst te weten dat je best niet met 5, 7 of 11 vissen kwam aandraven als je niet zoveel leden in je gezin had? Deze aantallen zijn namelijk niet eerlijk te verdelen in gelijke groepjes. We weten eigenlijk nog steeds niet waarvoor het beentje diende, maar het is in elk geval wel het bewijs dat rekenen al veel langer bestaat dan het schrift, dat zo'n 5000 jaar oud is. Het is natuurlijk pas sinds het schrift er is, dat we zeker weten hoe er toen aan wiskunde werd gedaan. Je kan het beentje trouwens bewonderen in het Museum voor Natuurwetenschappen (beter bekend als het dinomuseum) in Brussel.

1, 2, 3, ENZOVOORT

De streepjes staan rechtstreeks in verhouding tot het aantal dat ze voorstellen. Toch zijn ze niet zo handig wanneer we met grote aantallen zitten én je kan er ook heel moeilijk mee rekenen. Doorheen de tijd begon men daarom aantallen een naam te geven en zo werden 1, 2, 3… of de natuurlijke getallen geboren. Bij de namen hoorde een symbool dat het makkelijker maakte om aantallen neer te schrijven, maar je kon niet met elk symbool even makkelijk rekenen. We zien daarom een hele evolutie doorheen de tijd en de wereld, om uiteindelijk te komen tot de schrijfwijze van getallen die we als kind leren en tot hoe we daarmee moeten rekenen.

De Babyloniërs (3000-1600 v.Chr.) waren de eersten van wie we zeker weten dat ze wiskunde ontwikkelden om de praktische problemen op te lossen van een boer, een verkoper of zelfs de kapitein van een boot. Zij schreven hun vondsten, zoals de tafels van vermenigvuldiging en meetkundige berekeningen, in spijkerschrift op kleitabletten en voerden ook het positiestelsel voor getallen in. In dit stelsel bepaalt de plaats van de gebruikte symbolen in het getal de overeenkomstige waarde. Zo krijgt 1 de waarde tien wanneer we er een 0 achter zetten. De Babyloniërs werkten echter niet met veelvouden van 10, zoals wij nu doen, maar met veelvouden van 60. Ze gebruikten hun vingers om te tellen, maar dan wel op een heel slimme manier. Met je duim kan je de drie vingerkootjes van je overige vier vingers aanraken om zo te tellen tot 12. Als je 1 keer tot 12 hebt geteld, steek je 1 vinger van de andere hand op. Vijf vingers omhoog betekent dat je 5 keer tot 12 of dus tot 60 hebt geteld. We vinden daar vandaag nog overblijfselen van terug: 60 seconden in een minuut, 60 minuten in een uur en 360 graden in een cirkel danken we aan hen.

In het algemeen maakt een positiestelsel altijd gebruik van een gekozen bouwblokgetal en schrijven we elk getal uit ten opzichte van dit getal of basis. Wanneer we 60 nemen als basis, spreken we van een sexagesimaal of 60-delig stelsel. Wij werken echter in een decimaal of 10-delig stelsel, waarbij de basis 10 is. Eigenlijk kan je dit systeem zien als een natuurlijk gevolg van het tellen door streepjes te zetten, maar waarbij je efficiënter te werk gaat, wat vooral handig is voor grote getallen. Je basis bestaat uit een vast gekozen aantal streepjes of eenheden. Wanneer we nu nog turven, kiezen we er meestal vijf, waarbij we met het vijfde streepje de voorgaande vier doorkruisen. Het tellen van grote aantallen levert dan een heleboel doorkruiste streepjes en misschien nog enkele eenheden op. Om makkelijker het totaal te tellen kunnen we groepjes maken van vijf doorkruiste streepjes door er bijvoorbeeld een cirkel omheen te trekken. Als ons getal heel groot is, kunnen we die cirkels ook weer in groepjes van vijf samen nemen. We gebruiken dus de basis om groepjes van groepjes te maken. Zo wordt het wel een echte knoeiboel op je blad.

De Romeinen bedachten nieuwe symbolen als oplossing om groepjes van groepjes voor te stellen: I, V, X, L, C, D en M, waarbij I een vinger voorstelt, V een hand en X twee handen bij elkaar. Met hun schrijfwijze kan je nog redelijk makkelijk de som maken, maar het is een ramp om ermee aan het rekenen te slaan.

Eigenlijk is het slimmer om te werken met potjes. Laat ons voor de analogie met ons getallenstelsel even werken met groepjes van 10 om een hoop rijstkorrels te tellen. Telkens als we 10 korrels in een potje hebben gelegd, halen we ze eruit en leggen ze aan de kant. Om aan te duiden dat we er al 10 geteld hebben, leggen we 1 korrel van dat hoopje in een potje links ernaast. We tellen nu opnieuw tot we 10 korrels hebben, gieten het potje leeg en leggen 1 korrel in het tweede potje. Je kan nu al raden dat wanneer het tweede potje 10 korrels bevat, we een derde potje nemen, waar we dan 1 korrel inleggen die dat aantal voorstelt, wat dan gelijk is aan $10 \times 10 = 100$. Wanneer we op die manier doorgaan, is het supermakkelijk om het totale aantal rijstkorrels te berekenen. Stel dat we vier potjes nodig hadden, waarbij er in het meest linkse 3 korrels liggen, 6 in het volgende, 0 in het derde en ten slotte 1 in het laatste potje, dan hebben we

$$3 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 0 \times 10 + 1 \times 10^0 = 3601$$

korrels geteld. Hadden we gewoon korrel per korrel geteld, dan hadden we ons onderweg zeker vergist. Hoeveel keer ben jij al iets opnieuw beginnen tellen omdat je de tel kwijt was? Het linkse potje stelt dus de duizendtallen voor, dat ernaast de honderdtallen, dan hebben we de tientallen en ten slotte de eenheden.

Het idee om een symbool, de 0, te gebruiken voor een leeg potje werd meer dan 1000 jaar geleden al door de Maya's ingevoerd. Heb je gezien dat de Romeinen de 0 niet hadden? Zo konden ze natuurlijk geen aantal plakken op een lege pot of mand. Eigenlijk kan je het eerste gebruik van de 0 zien als het zetten van een komma in een tekst. Zo kan je het getal juist aflezen. Het was pas in de 7e eeuw dat de Indische wiskundige Brahmagupta 0 als een getal zag en er de eerste rekenregels voor opstelde.

Wanneer we nu nog eens naar de som hierboven kijken, is het duidelijk dat we de machten van 10 niet expliciet hoeven op te schrijven wanneer we rekening houden met de positie van de cijfers in het resulterende getal. De voordelen van dit Hindoe-Arabische positiestelsel waren meteen legio, want met deze schrijfwijze kon je wel makkelijk aan het rekenen slaan. Denk maar aan het vermenigvuldigen met de hand, waarbij 'eentje onthouden' eigenlijk niets anders is dan een rijstkorrel in een volgend potje leggen. Het getallenstelsel kwam naar het Westen dankzij de Italiaanse wiskundige Leonardo van Pisa (1170-1250), beter bekend als Fibonacci, die het begin 13e eeuw vanuit Spanje naar heel Europa bracht.

Wanneer we met basis 60 gewerkt zouden hebben, dan hadden we 3 potjes nodig gehad, met 1 korrel in het linkse en 1 in het rechtse, dus

$$1 \times 3600 + 0 \times 60 + 1 \times 1 = 1 \times 60^2 + 0 \times 60^1 + 1 \times 60^0,$$

wat we in basis 60 kunnen schrijven als 101.
Laten we nu eens gek doen en per 2 korrels een nieuw potje nemen. We veronderstellen gemakshalve maar dat we heeeeel veeeeel tupperwarepotjes hebben. Onze rijsthoop kunnen we dan schrijven als 111000010001. Nut-

teloos, denk je? Nee hoor, want met deze getallen, of het binaire stelsel, rekent onze computer.

Waar we het nog niet over hadden, zijn de negatieve getallen. Die werden tussen 220 v.Chr. en 300 n.Chr. ontdekt door de Chinezen en Hindoes, toen zij verschillen als 5 – 3 probeerden om te draaien. De Grieken beschouwden het opduiken van negatieve getallen als een indicatie dat het probleem fout was geformuleerd. Het was uiteindelijk ook Brahmagupta die ze officieel invoerde en dat in de context van schulden. De Europeanen moesten er tot de 17^{e} eeuw wel nog niets van weten. Misschien daarom dat we de staatsschuld vrolijk negeren? De negatieve getallen zijn nu echter onmisbaar en ze vormen samen met de natuurlijke de gehele getallen.

KIJK EN VERGELIJK

Getallenstelsels zijn dus op een heel natuurlijke manier gegroeid om aantallen efficiënt te kunnen tellen en ermee te kunnen rekenen. Maar hoe ging men dan om met lengtes, oppervlaktes en volumes van objecten? Wel, net zoals kinderen eigenlijk doen: al vergelijkend! Van ‘ik ben groter dan jij’ tot het checken of een speelgoedje in iets anders past – en het er dan niet meer uitkrijgen, natuurlijk. Zo bestudeerden de Griekse wiskundigen de meetkunde van objecten door ze met elkaar te vergelijken.

Een lijnstuk is gewoon een stuk van een lijn en dat kan even lang, korter of langer zijn dan een ander. Of zo lang als twee andere lijnstukken samen. Analoge vergelijkingen gaan op met hoeken, oppervlaktes van terreinen en volumes of inhouden van manden. Die werden gezien als verschillende grootheden van objecten, waarbij het niet nodig was om zo’n grootheid met 1 vast getal te associëren, omdat ze die steeds relatief bekeken. Ze vonden het niet nodig om te spreken over stokken van 50 en 100 cm, de tweede was gewoon tweemaal zo lang als de eerste. Ze gebruikten dus enkel getallen om

de verhoudingen onderling te beschrijven. Daaruit werden de breuken of de rationale getallen geboren – die naam is afgeleid van het Latijnse *ratio*. Zo spraken ze over de lengte van een stok die $\frac{2}{3}$ van een andere was. Wij zijn het denken met verhoudingen wat verleerd. Zo worstelen heel wat mensen met het berekenen van percentages, bijvoorbeeld bij kortingen of interestvoeten. Een tip: schrijf percentages als een verhouding of breuk. Stel dat je 4% van 75 uit het hoofd wil berekenen. Onmogelijk, denk je? Wanneer je dit als een breuk schrijft, dus

$$\frac{4}{100} \times 75,$$

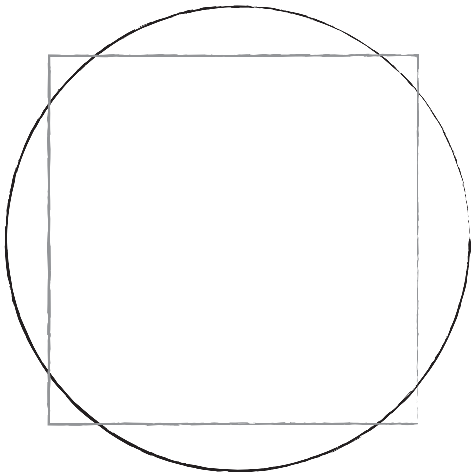
dan zie je dat dit hetzelfde is als 75% van 4 te berekenen. Dus

$$\frac{75}{100} \times 4 = \frac{3}{4} \times 4 = 3.$$

Easy peasy! Eentje om het (af) te leren: hoeveel is 8% van 25? Dit ‘trucje’ gaat trouwens regelmatig viraal op sociale media.

Een natuurlijke volgende stap na het rekenen met verhoudingen is het invoeren van een meeteenheid voor lengte, zoals de meter, waarop ons hele metriek stelsel is gebaseerd en waarover je alles kan lezen in het boek *Fysica* van Lieven Scheire. De meter verdelen we in 1000 eenheden, zodat we een lengte kunnen meten tot op een mm nauwkeurig. Tussen de millimeterstreepjes zitten er echter nog een heleboel mogelijke lengtes, die wij nu uitdrukken met getallen waar de Grieken initieel geen weet van, maar ook geen nood aan hadden, want ze dachten dat elke lengte, hoek, oppervlakte of volume altijd uitgedrukt kon worden als een rationaal getal maal een standaardgrootheid.

Om de oppervlakte van een willekeurige vorm te beschrijven, probeerden ze die daarom eerst om te vormen tot een vierkant met eenzelfde oppervlakte. Zo kon men makkelijker oppervlaktes met een standaardgrootheid vergelijken. De Griekse wiskundige Euclides van Alexandrië (300 v.Chr.) legde in de eerste twee boeken van zijn *Elementen*, echt wel de meest invloedrijke wetenschappelijke boekenreeks aller tijden, haarfijn uit hoe je dit moest doen met passer en liniaal, zonder schaalverdeling met streepjes, want je hoeft geen lengtes te meten. Daar werd de basis gelegd van ons meetkundeonderwijs. Euclides beschrijft op magistrale wijze hoe je de twee hulpmiddelen moet inzetten om punten, lijnen, cirkels enzovoort te construeren. Je leert zo op een tekening lengtes over te brengen zonder een getal te moeten kleven op de eigenlijke lengte van een lijnstuk. Op het einde van het tweede boek weet de lezer hoe hij de oppervlakte kan inschatten van elke figuur begrensd door lijnstukken, zoals een rechthoek, trapezium of onregelmatige veelhoek, door een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte.

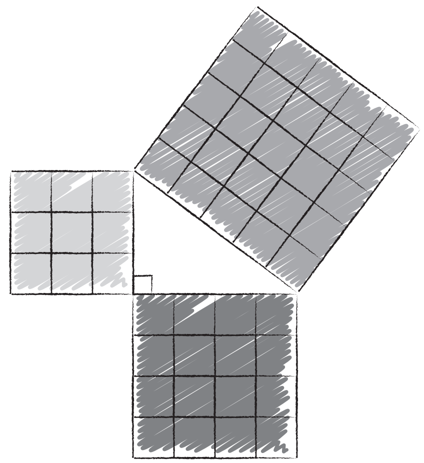


Wat als je nu met passer en liniaal een vierkant probeert te construeren met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel? Dat zal je nooit lukken. Men probeerde het echter lang, waardoor het een beroemd probleem werd, bekend als de kwadratuur van de cirkel. Een uitvloeisel van dit probleem is de trisectie van de hoek, waarbij men vraagt om een hoek te construeren die $\frac{1}{3}$ is van een gegeven hoek. Naast deze twee vlakke problemen kwam er in 3D de vraag naar de verdubbeling van de kubus, waarbij we een kubus wilden maken die tweemaal het volume van een gegeven kubus had. Pas in de 19^{e} eeuw werd aangetoond – met nieuwe wiskundige technieken – dat je dit met alleen passer en liniaal niet kon. Elke wiskundige krijgt weleens een bericht van iemand die beweert het wel te kunnen, dus *don't try this at home*.

DE BEKENDSTE STELLING TER WERELD

We blijven nog even hangen bij het construeren van vierkanten. Daarover vinden we in het boek van Euclides ook de wereldberoemde Stelling van Pythagoras terug. Die stelling geeft een manier om een vierkant te construeren waarvan de oppervlakte de som is van de oppervlaktes van twee kleinere vierkanten. Euclides formuleerde de stelling als volgt:

In rechthoekige driehoeken is het vierkant aan de zijde die de rechte hoek insluit, gelijk aan de vierkanten aan de zijden die de rechte hoek bevatten.



Was het Pythagoras die dit had ontdekt? Niet echt, want dit resultaat was 1000 jaar eerder al bekend in China en bij de Babyloniërs. Zij wisten echter niet dat dit waar was voor elke rechthoekige driehoek. Voor de driehoeken die zij getest hadden (reken het voorbeeld maar eens na), klopte het in elk geval, maar ze hadden geen manier om aan te tonen dat het altijd waar is. Ze gingen dus louter empirisch te werk, zoals we nu nog steeds in alle wetenschappen – buiten de wiskunde – doen: uit observaties een wet formuleren.

De legende gaat dat Pythagoras de eerste was die de universele waarheid van de stelling aantoonde.

In de 6e eeuw v.Chr. was Pythagoras van Samos een van de meest invloedrijke figuren uit de wiskunde, maar hij hulde zich in mysterie en daardoor is het voor historici moeilijk om feiten van fictie te onderscheiden. Hij was een echte cultfiguur en dat trok natuurlijk aan. Mensen gaven er veel voor op om van hem te kunnen leren, om te mogen toetreden tot zijn obscure broederschap (wees gerust, hier zaten gewoon ook vrouwen in). We weten niet precies wat ze daar allemaal bestudeerden, maar wat zeker lijkt, is dat Pythagoras de eerste vorm van logica ontwikkelde en daardoor verantwoordelijk was voor een heel nieuwe wending in de wiskunde. Door zijn vele reizen was hij in contact gekomen met een heel aantal oude culturen en zo kende hij de wiskundige technieken van de Egyptenaren en de Babyloniërs. Beiden gingen verder dan gewoon tellen en waren in staat om complexe berekeningen te maken, van boekhouding tot de constructie van ingewikkelde gebouwen. Ze kwamen proefondervindelijk tot wetmatigheden. Voorbeelden werden bestudeerd en berekend tot er een verband werd gevonden dat altijd bleek te werken. Maar voor hen was wiskunde alleen maar een middel om praktische problemen op te lossen. Ze deden bijvoorbeeld aan meetkunde om veldgrenzen die verloren waren gegaan bij de jaarlijkse overstroming van de Nijl, te reconstrueren. Zo is dan ook het woord geometrie ontstaan, dat letterlijk 'de aarde meten' betekent. Stevin vond dat het woord ook een eigen Nederlandse naam verdiende en sindsdien spreken wij dus over meetkunde.

Pythagoras merkte op dat zijn voorgangers hun formules gebruikten als een recept dat blindelings gevolgd kon worden. Die recepten, die van generatie op generatie werden doorgegeven, leken altijd het juiste antwoord te geven en dus kwam niemand op het idee om ze in twijfel te trekken of de logica achter de vergelijkingen te onderzoeken. Voor deze beschavingen was een werkend recept het belangrijkste; waarom iets werkte, was eigenlijk niet relevant. Zo ziet wiskunde er tijdens onze schooltijd ook vaak uit. Het is natuurlijk fantastisch om formules te kunnen afleiden uit proefondervindelijke ervaring, maar er blindelings op vertrouwen is een risico. Denk maar aan Newton, die er eigenlijk naast zat. Binnen de wiskunde kan je echter de waarheid van je vermoeden nagaan.

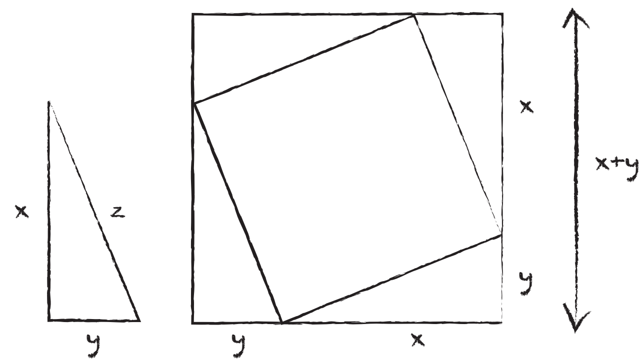
Pythagoras was de eerste die zag dat je enerzijds overal wiskundige concepten in kan zien, maar dat die wiskundige concepten anderzijds een leven op zich leiden. Hij realiseerde zich dat getallen onafhankelijk van de tastbare wereld kunnen bestaan. Wanneer we kleine getallen optellen of vermenigvuldigen, kunnen we de correctheid van de berekening experimenteel vaststellen door ze 'uit te voeren' met stenen (bijvoorbeeld: $3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$). Ook gigantisch grote getallen kunnen we optellen en vermenigvuldigen, maar de correctheid van de berekening kunnen we niet meer checken door ze na te tellen met stenen. Toch zijn we allemaal akkoord met het resultaat (als er geen rekenfout in zit, tenminste). De studie van getallen is dus niet bezoedeld door de onnauwkeurigheden van waarnemingen of observaties. We aanvaarden de berekening, omdat getallen op dat moment een abstracte voorstelling vormen waarmee we via rekenregels aan de slag kunnen. Zo kan je ze ook voor meer dan rekenen alleen gebruiken. Je kan er de eigenschappen van bestuderen, de relaties ertussen en de patronen die je ermee kan maken. Dit geeft waarheden die onafhankelijk zijn van meningen of vooroordelen. Je kan dus puur van de definitie van een wiskundig concept vertrekken en hier dan uitspraken of beweringen over doen waarvan je de waarheid probeert na te gaan.

Hoe kwam hij tot dit inzicht? Hoe ontdekte hij dat de formule over de drie vierkanten altijd waar was? Hij kon ze onmogelijk voor alle rechthoekige driehoeken testen. Je kan altijd een nieuwe driehoek vinden die je nog niet getest hebt. Hoe kan je dan ooit 100% zeker zijn? Pythagoras vond het antwoord in het concept van bewijs, een onweerlegbaar argument dat in een eindig aantal logische stappen laat zien dat een bepaalde bewering waar is. Een bewering die bewezen is, noemen we een stelling. Tot dan is een patroon, zelfs een dat empirisch aan bewijskracht wint, enkel een conjectuur of vermoeden. Het wordt pas een stelling wanneer er een bewijs voor is gevonden. Het vinden van zulke absolute waarheden is al meer dan 2500 jaar de drijfkracht van een wiskundige. De job begint bij het zien van een patroon, waarover vervolgens een vermoeden wordt geformuleerd. Nadien wordt er geprobeerd om er een bewijs óf ontkrachting in de vorm van een tegenvoorbeeld voor te vinden. Soms duurt dat heel lang of lukt het maar niet om een bewijs of tegenvoorbeeld te vinden. In dat geval krijgt zo'n vermoeden een echte cultstatus. Je zal er zo enkele tegenkomen in dit boek.

Hoe begin je nu aan een bewijs? Wel, alle begin is moeilijk, maar je moet ergens beginnen. We vertrekken binnen de wiskunde altijd van definities en beweringen waarvan we al zeker weten dat ze waar zijn. Deze laatsten zijn ofwel eerder bewezen of zijn een axioma, een startpunt waarvan we aannemen dat het waar is. Hier bevinden we ons natuurlijk op glad ijs, zoals we straks zullen zien. Ze beschrijven in feite de eigenschappen waaraan bepaalde objecten moeten voldoen. Zo aanvaarden we zonder bewijs dat je twee punten op een A4-blad altijd kan verbinden met een rechte lijn. Iedereen akkoord, neem ik aan. Wanneer je dan iets meetkundigs wil bewijzen, mag je hiervan gebruikmaken, net zoals Euclides deed. Hij was ook degene die dat axioma (soms zeggen we ook wel postulaat), samen met nog twaalf andere, formuleerde en de kunst van het bewijzen meester was. Na het uitbrengen van zijn boekenreeks werd wiskunde dan ook van generatie op generatie doorgegeven via axioma's, stellingen en hun bewijs als de expliciete getuige van de gevolgde redenering.

Axioma's worden meestal geformuleerd uit observaties. De wiskunde redeneert dan vanuit die axioma's steeds verder en verder. Via logische redeneringen maken we combinaties met het gekende om het nog onbekende te bereiken. Zo hoef je onderweg dan ook niet meer terug te grijpen op de axioma's zelf. Alles wat we op deze manier afleiden, is dan waar. Soms vinden we resultaten die op zichzelf niet zoveel voorstellen en die eigenlijk vooral dienen om tot een groter resultaat te komen. In zekere zin hebben we er dan niet zoveel eerbied voor, misschien wel onterecht... Zo'n stelling noemen we dan eerder een lemma. In elk geval is elke bewering, eens ze bewezen is, voor altijd waar. Tot het einde der tijden. Een wiskundig bewijs is absoluut.

Hoe kreeg de Stelling van Pythagoras deze absolute waarheid? Hoe kunnen we aantonen dat het resultaat geldt voor elke rechthoekige driehoek, hoe lang zijn zijden ook zijn? Ondertussen ben je echt wel heel nieuwsgierig, niet? Als je er graag wat meer over wil weten, kan je het onderstaande kaderstuk lezen.



EEN BEWIJS VOOR DE STELLING VAN PYTHAGORAS

Omdat we de lengte van de zijden van een willekeurige driehoek niet kennen, beginnen we met ze gewoon een naam te geven. Meestal stellen we zo'n variabele voor met een letter, een zeer korte naam eigenlijk. Hier gebruiken we x, y en z, waarbij z de lengte van de schuine zijde voorstelt. Zo werken we niet met een expliciet gekozen waarde, maar redeneren we met elke mogelijke waarde tegelijkertijd.
Vervolgens tekenen we een rechthoekige driehoek. Wacht even, hoor ik je denken, als je gaat tekenen, moet je natuurlijk wel een lengte kiezen! Inderdaad, maar zolang we die nergens expliciet in een berekening gebruiken, doet het er eigenlijk niet toe. Nu kopiëren we de driehoek drie keer en leggen de vier identieke driehoeken dan neer zoals op de tekening, zodat ze met hun schuine zijden een vierkant vormen. De getekende lengtes van de driehoekszijden doen er zo dus niet toe. De constructie van een groot vierkant (niet gewoon een rechthoek, want alle zijden zijn gelijk aan de som van de twee rechthoekszijden) en een kleiner gekanteld vierkant erin zal altijd lukken. Op de ene tekening kan het kleine vierkant wat meer gekanteld liggen dan op de andere, maar dat maakt helemaal niet uit voor onze verdere berekening. De oppervlakte van het kleine vierkant kennen we al meteen, die is z^2. Nu proberen we de oppervlakte van het grote vierkant