

Onderzoek naar de geschiedenis van de wiskunde is onderzoek naar de geschiedenis van de beschaving. Er kan zelfs worden gezegd dat de wetenschappelijke revolutie van de renaissance ontstond vanwege de wiskundige vooruitgang. Toen Fibonacci (zie bladzijden 94-95 en 98-99) in de dertiende eeuw de hindoe-Arabishe cijfers in Europa introduceerde, werd de wiskunde bevrijd van de beperkingen van de Romeinse cijfers.

Er moet worden gezegd dat de wiskunde niet overal met dezelfde snelheid vooruitgang boekte. Deze vooruitgang kwam als eb en vloed. Ideeën werden ontdekt, gingen verloren en werden later herontdekt. De stroom van kennis liep niet altijd in één richting en de moderne wiskunde ontleent veel verschillende ideeën aan veel verschillende plaatsen. Maar we hebben veel te danken aan Arabische en Perzische wiskundigen. Ze zaten tussen Griekenland en India in en haalden het beste uit beide werelden, voordat hun kennis naar Europa en de wieg van de renaissance werd geëxporteerd.

In de moderne wereld is wiskunde alomtegenwoordig geworden. Deze heeft ons natuurlijk altijd in veel vormen omringd. Maar tegenwoordig speelt ze een grotere rol in het dagelijks leven van de mens dan ooit tevoren. De geavanceerdheid van een moderne computer betekent dat er veel meer

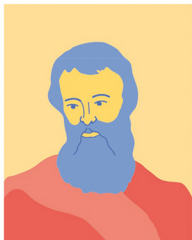
'Er is geen koninklijke weg naar de meetkunde.'

—Euclides

is geïnvesteerd in technologische genialiteit en dat gaat gepaard met zeer geavanceerde wiskunde.

Maar je hoeft geen computerexpert of wiskundig genie te zijn om de schoonheid van getallen te waarderen. Hoe meer je je bewust wordt van wiskunde, hoe meer je de invloed ervan op de wereld om je heen ontdekt. Je hoeft niet per se alle vergelijkingen te snappen. Zelfs de meest complexe takken van de wiskunde, zoals de chaostheorie, zijn terug te vinden in dagelijkse beelden, zoals opkringelende rook van een sigaret of het wolkje melk in je koffie.

Euclides wordt algemeen geprezen als de 'vader van de meetkunde' en meetkunde vormde de basis van de Griekse wiskunde.



De aard van de wiskunde

Wiskunde is uniek omdat ze tegelijkertijd zowel tastbaar als volledig abstract kan zijn. Op het eenvoudigste niveau kun je optellen bijvoorbeeld laten zien met iets tastbaars zoals een handvol steentjes. De som $2 + 2 = 4$ is een algemene stelling die betrekking kan hebben op elk voorwerp, van steentjes tot peren, of die een volledig abstracte uiting kan zijn zonder enige fysieke belichaming.

Historisch heeft de wiskunde zich ruwweg ontwikkeld van een concreet vak tot een meer abstract vak. Voor de oude Grieken was wiskunde een praktisch vak en meetkunde vormde hier de basis van. Een variabele werd voorgesteld als een lengte, het kwadraat van die variabele als een oppervlakte en de derde macht ervan als een volume. Maar die pragmatische benadering bezorgde de Grieken hoofdpijn als het ging om ideeën die buiten dit model vielen, zoals negatieve getallen.

In de loop van de daaropvolgende millennia is de wiskunde abstracter van vorm geworden en daardoor flexibeler. Maar dat betekent niet dat de toepassingen ervan minder praktisch zijn. Zelfs als een idee op puur theoretische basis wordt uitgewerkt, kan die haar weg vinden naar dagelijks gebruik. Een goed voorbeeld is Joseph Fourier (1768-1830), een Franse wiskundige die werkte met oneindige reeksen goniometrische functies. Toen hij leefde, was dit onderwerp puur theoretisch van aard, een wiskundige puzzel die moest worden opgelost en ogenschijnlijk op zichzelf stond. Maar jaren later vormen de funderingen die hij heeft gelegd de basis van de analoog-digitaalomzetting, de

$$2x(3x - 4) = 6x^2 - 8x$$

De taal van de wiskunde is mooi en overschrijdt de grenzen van landen en continenten.

techniek die wordt gebruikt om analoge geluidsgolven om te zetten in digitale compact discs.

De taal van de wiskunde

Een van de fascinerendste dingen van wiskunde is dat het een universele taal is. Hoewel er op aarde veel verschillende talen zijn, is er één gemeenschappelijke vorm van wiskunde.

Ik heb veel uitwisselingsstudenten in mijn klassen, vooral uit Europa en Azië. Als ze hun leerboeken uit hun eigen land meenemen, begrijp ik er geen woord van, maar de wiskundige symbolen begrijp ik wel. Zoals David Hilbert (1862-1943), een groot Duits wiskundige, zei: 'Wiskunde kent geen rassen of geografische grenzen; voor de wiskunde is de culturele wereld één land.'

Platonische lichamen

De platonische lichamen zijn, net als de archimedische lichamen op bladzijden 60-61, mooie voorbeelden van driedimensionale meetkunde. Je komt ze eigenlijk overal in tegen, van dagelijkse voorwerpen zoals dobbelstenen tot de vormen van moleculen (methaan is een tetraëder) en zelfs virussen (het herpesvirus is een icosaeëder).

De vijf platonische lichamen zijn alle regelmatig. Dit zijn de tetraëder, hexaëder (kubus), octaëder, dodecaëder en icosaeëder. Deze bekende reeks vormen is vernoemd naar Plato (zie bladzijden 50-51), hoewel hij ze waarschijnlijk niet zelf heeft ontdekt.

Bronnen duiden erop dat de pythagoreërs (zie bladzijden 42-43) de regelmatige tetraëder, hexaëder en dodecaëder kenden. Maar de regelmatige octaëder en de regelmatige icosaeëder zijn waarschijnlijk ontdekt door Theaetetus (417-369 v.Chr.), een Griekse wiskundige die studeerde



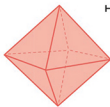
Tetraëder

4 hoekpunten,
6 ribben en 4 vlakken



Hexaëder (kubus)

8 hoekpunten,
12 ribben en
6 vlakken



Octaëder

6 hoekpunten,
12 ribben en
8 vlakken



Icosaëder

12 hoekpunten,
30 ribben en
20 vlakken



Dodecaëder

20 hoekpunten,
30 ribben en
12 vlakken

OVER VLAKKEN

Bij de platonische lichamen bestaat er ook een relatie tussen de vlakken, ribben en hoekpunten. De tetraëder heeft vier vlakken, vier hoekpunten (waar de ribben samen komen op een punt) en zes ribben. De kubus heeft zes vlakken, acht hoekpunten en twaalf ribben. In de laatste kolom zie je een mooie symmetrie in de relaties tussen de vlakken, hoekpunten en ribben van alle vijf de platonische lichamen.

Veelvlakken	Vlakken (V)	Hoekpunten (H)	Ribben (R)	$V + H - R$
Tetraëder	4	4	6	$4 + 4 - 6 = 2$
Hexaëder	6	8	12	$6 + 8 - 12 = 2$
Octaëder	8	6	12	$8 + 6 - 12 = 2$
Dodecaëder	12	20	30	$12 + 20 - 30 = 2$
Icosaëder	20	12	30	$20 + 12 - 30 = 2$

onder Plato en die de hoofdpersoon is in twee van Plato's *Dialogen*. Dit idee wordt ook gesteund in Boek XIII van Euclides' *Elementen*.

Er wordt ook gedacht dat Theaetetus het eerste bewijs leverde dat er, in het geval van driedimensionale voorwerpen, slechts vijf van dergelijke vormen zijn.

Eigenschappen van de platonische lichamen

Eerst moet worden gedefinieerd wat een platonisch lichaam is. Een object is een platonisch lichaam als het congruente (gelijke) vlakken heeft. Deze vlakken mogen elkaar alleen snijden bij de ribben en hetzelfde aantal vlakken moet bij elk hoekpunt bijeenkomen. Dit betekent dat, ongeacht welk vlak er onder ligt, de vorm er altijd hetzelfde uitziet. Daarom zijn platonische lichamen eerlijk en worden ze gebruikt als dobbelstenen.

De regelmatige hexaëder (kubus) is de bekende dobbelsteen met zes vlakken. De andere worden soms gebruikt voor *role-playing games* en oorlogsspelletjes. De tabel hierboven toont de interessante relatie tussen de vlakken, hoekpunten en ribben.

Plato kende ook wat minder wiskundige, maar wel fascinerende kenmerken toe aan de platonische lichamen. Hij koppelde ze aan de klassieke elementen uit de oudheid, waarbij de tetraëder vuur werd, de hexaëder aarde, de octaëder lucht en de icosaeëder water. Het vijfde platonische lichaam, de dodecaëder, kreeg de rol van het schikken van de sterrenbeelden.

Omar Khayyam

Omar Khayyam was de eerste niet-Europese wiskundige die ik leerde kennen. Daarmee begonnen mijn Europees georiënteerde ideeën te veranderen, hoewel je uit dit boek kunt opmaken dat er nog ruimte is voor verbetering.



Omar Khayyam werd geboren op 18 mei 1048 in Nisjapoer, Perzië. Voordat hij 25 was, had Khayyam al belangrijke wiskundige werken geschreven. In 1070 verhuisde hij naar Samarkand, in het huidige Oezbekistan, waar hij de steun kreeg van Abu Tahir,

een vooraanstaand rechtsgeleerde. Zo kon Khayyam zijn belangrijkste werk schrijven: *Verhandeling over de oplossing van algebra-problemen*. In 1073 nodigde Malik-Sjah, de sultan van de Seltsoekdynastie, Khayyam uit in de stad Isfahan, de hoofdstad, om een observatorium op te zetten. Khayyam bleef de volgende achttien jaar in Isfahan. In 1092, na de dood van Malik-Sjah, volgden er politieke onlusten tot 1118 toen Malik-Sjahs derde zoon, Sanjar, de leiding over de Seltsoekdynastie nam. Sanjar verhuisde de hoofdstad van de dynastie naar Merv en Khayyam ging daar vlak na 1118 ook heen. In Merv werd nog een studiecentrum opgezet en Khayyam bleef aan zijn wiskundige werken totdat hij op 4 december 1122 overleed.

Algebra problemen

Verhandeling over de oplossing van algebra-problemen is Omar Khayyams grootste wiskundige werk. In dit boek uit 1070 geeft Khayyam een volledige classificatie van derdegraadsvergelijkingen met oplossingen die worden gevonden met behulp van kegelsneden (zie kader hierboven).

Door op meetkundige wijze het snijpunt van twee kegelsneden te vinden, kon Khayyam derdegraadsvergelijkingen oplossen. Het is echter opmerkelijk dat hij slechts een of misschien twee van de drie mogelijke oplossingen vond. Zijn oplossingen waren meetkundig, maar Khayyam hoopte dat er ooit een rekenkundige oplossing zou worden ontwikkeld. Dit gebeurde vele eeuwen later in het werk van Italiaanse wiskundigen.

BELANGRIJKSTE WERKEN

De Rubaiyat

Khayyam is waarschijnlijk het bekendst door de *Rubaiyat*, die ook in het Nederlands is vertaald. De *Rubaiyat* is een verzameling van zeshonderd kwatrijnen (vierregelge verzen).

Rekenkundige problemen

Een boek over algebra en muziek. Op verzoek van Malik-Sjah zette Khayyam een observatorium op in Isfahan. Hij berekende de lengte van een jaar als 365,24219858156 dagen, wat verbazingwekkend nauwkeurig is. Hij maakte ook een nieuwe kalender, de Jalaikaler.

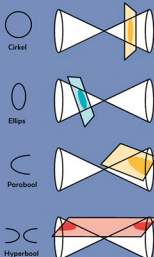
Algebra problemen (verloren gegaan)

In zijn andere werken verwijst Khayyam naar een verloren werk waarin hij schrijft over wat later bekend zou worden als de driehoek van Pascal (zie bladzijden 130-131 en 134-135).

KEGELSNEDE

Kegelsneden is een onderdeel van de wiskunde dat kijkt naar vormen die ontstaan uit een kegel. Uit een kegel kunnen vier vormen worden gesneden: de cirkel, de ellips, de parabool en de hyperbool.

Deze vormen komen overal voor. De cirkel is duidelijk (waar zou de automobielindustrie zijn zonder ronde banden?). Een voorbeeld van de ellips is de baan van de aarde rond de zon, een voorbeeld van een parabool (in drie dimensies) is een satelliet-schotel en het schijnsel van een lamp op een muur is een hyperbool.



'De meeste mensen die filosofen imiteren, verwarren het ware met het onware en ze doen niets anders dan bedriegen en kennis veinzen. Wat ze weten van de wetenschappen gebruiken ze niet, behalve voor basale en materiële doeleinden.'

—*Verhandeling over de oplossing van algebra problemen*

Oefening 19

Rekenkundige rijen

DE OPGAVE:

In Duitsland, eind achttiende eeuw, wil een vermoeide, overwerkte basisschoolleraar wat werk doen en laat zijn leerlingen alle getallen van een tot honderd bij elkaar optellen om ze even bezig te houden. Maar een van de leerlingen, Carl, is al binnen vijf minuten klaar en begint de leraar lastig te vallen. Hoewel de leraar het niet leuk vindt, erkent hij het talent van dit 'wiskundewonder'. Weet jij hoe Carl dit deed?

DE METHODE:

Carl is geen sukkel. Terwijl de andere kinderen alle getallen van een tot honderd beginnen op te tellen, denkt hij eerst na.

Hij kan de getallen van een tot honderd bij elkaar optellen, of van honderd tot een. In beide gevallen is het antwoord hetzelfde:

$$1 + 2 + 3 \dots + 98 + 99 + 100 = \text{som}$$

of

$$100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 = \text{som}$$



DE OPLOSSING:

De som van de getallen van een tot honderd is 5050.

Nadat hij de lijst olopend en aflopend heeft opgeschreven, ziet Carl dat de sommen van de kolommen allemaal gelijk zijn. Dus als hij de bovenste en onderste reeksen bij elkaar optelt, krijgt hij twee keer de som:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 \dots + 98 + 99 + 100 &= \text{som} \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 &= \text{som} \\ 101 + 101 + 101 \dots + 101 + 101 + 101 &= 2 \cdot \text{som} \end{aligned}$$

Dan ziet hij dat hij honderd keer 101 heeft, dus hij kan de linkerreeks herschrijven als een vermenigvuldiging:

$$100(101) = 2 \cdot \text{som}$$

Door beide kanten door twee te delen, wordt de som:

$$\frac{100(101)}{2} = \text{som}$$

$$5050 = \text{som}$$



REKENKUNDIGE RIJEN

De gedachtelijn die Gauss liet zien, leidt tot een algemene formule voor de som van een rekenkundige rij.

Een rekenkundige rij is een rij waarbij elk getal wordt gevonden door een gemeenschappelijk getal (het verschil) op te tellen bij het voorgaande getal. Een voorbeeld van een rekenkundige rij is $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23$. In deze rij is de eerste term drie, het verschil is vier en het aantal termen is zes. De formule voor de som van een rekenkundige rij is

$$s = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

waarbij a de eerste term is, d het verschil is en n het aantal termen is. Als je de getallen uit de bovenstaande rij in de formule invult, krijg je:

$$s = \frac{6}{2} (2 \cdot 3 + (6-1)4)$$

Dit kan worden vereenvoudigd tot $s = 3(6 + (5)4)$, wat na verdere vereenvoudiging $s = 78$ geeft.