HET MYSTERIE VAN PHI

de gouden draad van eeuwige wijsheid

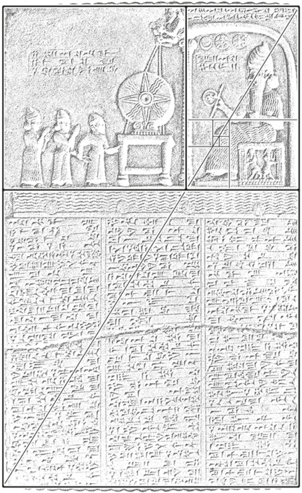
De geschiedenis van de gulden snede is lastig te ontwarren. Hij was al bekend in het oude Egypte en de pythagorische traditie, maar de eerste definitie is van Euclides (325-265 v.Chr.), die hem definieert als de verdeling van een lijn in 'extreme en gemiddelde verhouding'. De oudste bekende verhandeling erover is *De Divina Proportione* van de in schoonheid zwelgende monnik Luca Pacioli (1445-1517); ze werd geïllustreerd door Leonardo da Vinci, die ook de term *sectio aurea* ('gulden snede') bedacht zou hebben, al komt die term pas voor het eerst voor in het werk van Martin Ohm (1792-1872).

Er zijn heel wat namen voor deze mysterieuze sectie, zoals 'gulden verhouding', 'goddelijke verhouding', 'gemiddelde', 'verdeling' of 'snede'. In wiskundige notitie werd wel het symbool *t* gebruikt, de eerste letter van het Griekse woord *tomè* ('snede'), maar gebruikelijker is Φ of ϕ ('phi'), de eerste letter van de Griekse beeldhouwer Phidias, die hem toepaste in het Parthenon.

Maar wat is die raadselachtige snede en wat is er zo fascinerend aan? Een van de eeuwige vragen van filosofen is hoe het Ene overging in het Vele. Wat is de aard van scheiding of verdeling? Is er een manier waarop delen een betekenisvolle relatie kunnen hebben met het geheel?

Plato (427-347 v.Chr.) stelt deze vraag in allegorische termen in *De republiek* en vraagt de lezer om 'een lijn ongelijk te verdelen'. Gebonden aan een pythagorische zwijgplicht die hem verbood de mysteries te onthullen stelde Plato vragen, in de hoop op een inzichtelijk antwoord. Waarom gebruikt hij een lijn en geen getallen? En waarom moeten we die ongelijk verdelen?

Voor het antwoord moeten we eerst iets leren over verhoudingen.



Tablet of Shamash, early 9th C BC, Sippar, S Iraq, after Michael Schneider.

ORDE ACHTER DIVERSITEIT

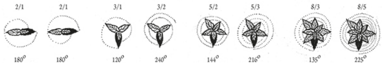
ze houdt van me, ze houdt niet van me

De natuur kent drie basismanieren om bladen te schikken aan een stengel: tweerijig (als mais), kruis- of kransvormig (als munt) en, de meest voorkomende, spiraalfyllotaxis (bij circa 80% van de 250.000 soorten van hogere planten), waar de hoek van divergentie (rotatie) tussen bladen slechts een paar waarden kent, die allemaal dicht bij de fibonaccibenadering van de gulden hoek liggen (137,5°). Dit patroon bevordert de fotosynthese, geeft elk blad het maximum aan zonlicht en regen, laat het vocht efficiënt naar de wortels lopen en biedt de beste kansen voor bestuiving.

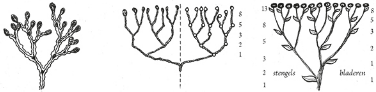
Het aantal tegengestelde spiralen van zaden in een zonnebloem betreft doorgaans naburige fibonaccigetallen, meestal 55:34 (1,6176) of 89:55 (1,6181). De getallen voor de schubben van dennenappels zijn meestal 5:3 (1,6666) of 8:5 (1,6). Artisjokken vertonen 8 spiralen één kant uit en 5 de andere kant uit. Ananassen hebben 3 spiralen, vaak 8, 13 en 21 (*onder*), waarbij 21:13:8 nadert tot @:1:1/Φ^2, met 21:13 (1,6153) en 13:8 (1,625), en 21:8 (2,625), wat neigt naar Φ^2 of $\Phi^2 + 1$. En zo hebben wilgentakken 5 spiralen met elk 13 katjes.

Kijk de volgende keer als u in de natuur bent eens naar de bloemblaadjes van een margriet, tel de spiralen van een dennenappel of let op de katjes van een wilgentak.

8 gradueel *5 gradueel* *13 medium* *8 steil* *21 steil*



Simpele fyllotaxis volgens fibonaccigetallen – in elk geval a:b, a bladen worden geproduceerd in b wentelingen, waardoor de bladdivergentiehoek (b/a)360° is. Als a en b toenemen, nadert de divergentiehoek 137,5° en 222,5°.



Bruine algen (links), met een schema (midden) dat het aantal volgens fibonaccigetallen verlopende vertakkingen toont. Ook wilde bertram (rechts) vertoont deze getallen bij telling van de stengels en bladeren.

De drie fyllotaxispatronen, tweerijig, kruisvormig en spiraal (naar Ball), tussen twee fibonaccispiralen. De plant links heeft 8 bladen in 5 wentelingen, de wilgentak rechts 13 katjes in 5 wentelingen.

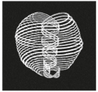
Exponenten en spiralen

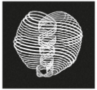
een uitgebreide familie van fraaie krommen

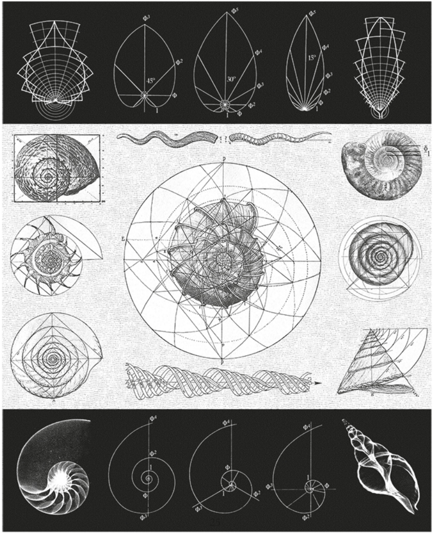
In de natuur vindt gnomonische groei plaats door simpele aanwas. Het levert de fraaie logaritmische spiraalgroei op die we zien bij schelpdieren, die continu nieuw materiaal toevoegen aan het open einde van hun schelpen. Belangrijk daarbij is dat de schelp wel toeneemt in omvang, langer en breder wordt, maar zijn proporties handhaaft. Dit proces, dat ook zichtbaar is bij kristallen, is de simpelste groeiwet.

De gulden spiraal, die is ontleend aan fibonaccigetallen en de arm van een pentagram (*onder*), is lid van de familie van logaritmische spiralen. Ze worden ook 'groeispiralen', 'gelijkhoekige spiralen' en soms *spira mirabilis*, 'wonderspiralen', genoemd. Bij een logaritmische spiraal is de kromming op elke schaal dezelfde en elke lijn vanuit het centrum raakt elk deel in exacte dezelfde hoek voor die spiraal. Zoom in op een logaritmische spiraal en u ontdekt nog een andere spiraal. Ze onderscheiden zich van archimedische spiralen, waarvan de wendingen op gelijke afstand van elkaar blijven, zoals een opgerolde slang.

De natuur kent veel logaritmische spiralen in blad- en schelpvorm, cactus- en zaadfyllotaxis, draaikolken en sterrenstelsels. Vele kunnen worden benaderd via een familie van gulden spiralen die zijn ontleend aan de gelijke verdeling van een cirkel.







Gulden veelvlakken

water, ether en de kosmos

De gulden snede speelt een fundamentele rol in de structuur van de 3D-ruimte, vooral in het twintigvlak en zijn duaal, het twaalfvlak gecreëerd uit de centra van de vlakken van het twintigvlak. Een rechthoek in een twintigvlak heeft zijden in de ratio Φ:1 (of 1:ϕ) (*zie linksonder*). De rechthoeken in een twaalfvlak zijn Φ^2:1 (of 1:ϕ^2). In een twaalfvlak genesteld snijdt een twintigvlak de zijden daarvan in de ratio Φ:1 (*middenonder*). De exquise vroege tekeningen van Kepler, Da Vinci (*blz. 45*) en Jamnitzer (1508-1585) tonen hun fascinatie met Φ en de wortelrelaties in de vijf platonische en dertien archimedische veelvlakken.

Een voortzetting van dit thema is het afgeknotte twintigvlak, dat we nu kennen als de structuur van C_{60}, of een voetbal; de rechthoek in dit vlak heeft zijden in de ratio 3Φ:1. De icosidodecaëder heeft een radius:zijde van Φ:1. En de romboëdrische triacontaëder bestaat uit dertig Φ:1-ruiten.