DRIEHOEKEN

en hun diverse centra

Een rechthoekige driehoek voldoet aan de *stelling van Pythagoras*: het kwadraat van de hypotenusa (de zijde tegenover de rechte hoek) is gelijk aan de som van de kwadraten van de twee andere zijdes (*rechts, linksboven*).

$a^2 + b^2 = c^2$ oftewel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

De som van de binnenhoeken in elke driehoek = 180°, of π *radialen*.

De *omtrek* $O = a + b + c$

Het oppervlak $S = \frac{1}{2}\, bh = \frac{1}{2}\, ab \sin C$ (*zie rechtsboven*).

Sinusregel: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2r$

(waarbij r de straal is van de omgeschreven cirkel).

Zwaartelijnen verbinden de hoeken met het midden van de zijde ertegenover. De drie zwaartelijnen kruisen in het *zwaartepunt*:

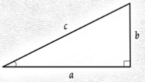
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \qquad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

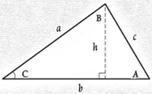
Hoogtelijnen zijn lijnsegmenten die vanuit een hoek de zijde tegenover (of het verlengde daarvan) in een rechte hoek snijden:

$$h_a = \frac{2S}{a} \qquad h_b = \frac{2S}{b} \qquad h_c = \frac{2S}{c}$$

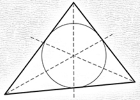
De drie hoogtelijnen kruisen in het *hoogtepunt*.



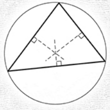
Een rechthoekige driehoek



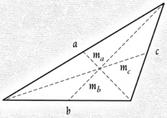
Interne hoeken van een driehoek



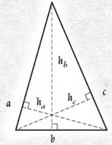
De deellijnen van een driehoek snijden elkaar in het midden van de binnencirkel



De middelloodlijnen snijden elkaar in het midden van de omgeschreven cirkel



Zwaartelijnen lopen naar het midden van elke zijde en kruisen elkaar in het zwaartepunt



Hoogtelijnen snijden elkaar in het hoogtepunt (niet per se binnen de driehoek)

Boldriehoeksmeting

formules voor hemel en aarde

Een *boldriehoek* heeft binnenhoeken met een som tussen de 180 en 540°. De zijdes zijn bogen van *grote cirkels* (met de centra op het centrum van de bol). Twee punten op een bol kunnen een *grote* cirkel definiëren en drie een *kleinere*. Elke cirkel op een bol definieert twee *polen*.

De zijdes van een boldriehoek kunnen worden gezien als hoeken. De zes relevante kwantiteiten worden rechts getoond en beantwoorden aan:

Sinusregel: $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$

Cosinusregel: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

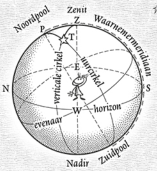
Tangensregel: $\dfrac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}(b-a)}$

Boldriehoeksmeting wordt gebruikt in de navigatie. Door *lengte-* en *breedtegraden* te gebruiken vaart een schip bijvoorbeeld van Q naar *R*:

$a = 90° - \text{br.gr. } R \qquad b = 90° - \text{br.gr. } Q \qquad C = \text{l.gr. } Q - \text{l.gr. } R$

C heet de *poolhoek*. De begin- en eindkoers worden gegeven door *A* en *B* en de lengte van de reis door *c*. Gebruik de volgende vergelijkingen om *B*, *A* en *c* op te lossen:

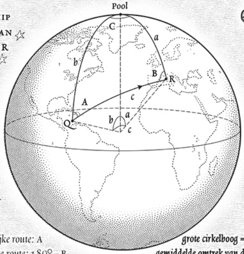
$$\tan \tfrac{1}{2}(B+A) = \cos \tfrac{1}{2}(b-a) \sec \tfrac{1}{2}(b+a) \cot \tfrac{1}{2} C$$
$$\tan \tfrac{1}{2}(B-A) = \sin \tfrac{1}{2}(b-a) \csc \tfrac{1}{2}(b+a) \cot \tfrac{1}{2} C$$
$$\tan \tfrac{1}{2} c = \tan \tfrac{1}{2}(b-a) \sin \tfrac{1}{2}(B+A) \csc \tfrac{1}{2}(B-A)$$



De astronomische driehoek PZeT voor enkele objecten

zijde TZe = zenitafstand van T = 90° – hoogte van T
zijde TP = poolafstand van T = 90° – declinatie van T
zijde ZeP = 90° – of + breedtegraad waarnemer (N of Z halfrond)
hoek PZeT = azimut van T (als T oost van waarnemermeridiaan is)
of 360°– azimut van T (als T west van wm is)
hoek ZePT = uurhoek van T (als T west van wm is) in uren
of 360°– uurhoek (als T oost van wm is)

Een schip vaart van Q naar R



Aanvankelijke route: A
Uiteindelijke route: 180° – B
Polaire hoek: C

Geodetiek

1 minuut ($\frac{1}{60}$°) van grote cirkelboog = 1 zeemijl = 6080 voet gemiddelde omtrek van de aarde = 24.860 mijl (40.008 km)

De wetten van Kepler en Newton

lichamen in beweging

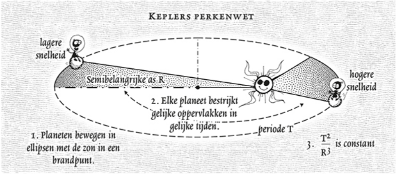
Johannes Kepler (1571-1630) ontdekte drie wetten voor planetaire beweging. Ze gelden voor alle lichamen in een baan in de ruimte.

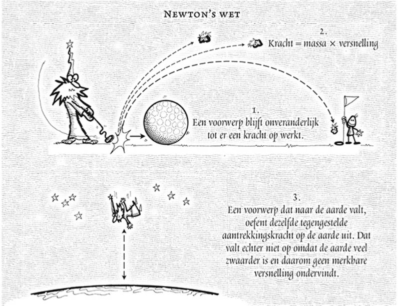
1. *Planeten bewegen in ellipsen met de zon in een brandpunt.*
2. *Een lijn vanaf de zon naar een planeet bestrijkt gelijke oppervlakken in gelijke tijden.*
3. *Het kwadraat van de tijd waarin een planeet rond de zon draait gedeeld door de derde macht van de helft van zijn grote as is constant in het hele zonnestelsel.*

Uit Keplers ontdekkingen leidde Isaac Newton (1643-1727) zijn *gravitatiewet* af en daarna deduceerde hij zijn bewegingswetten:

1. *Een voorwerp in rust of beweging blijft in die staat tot er een kracht op werkt.*
2. *De versnelling die een kracht produceert op een gegeven massa staat in verhouding tot die kracht.*
3. *Een kracht uitgeoefend door A op B gaat altijd vergezeld van een gelijke kracht van B op A, in dezelfde rechte lijn, maar in tegengestelde richting.*

Albert Einstein (1879-1955) ontdekte dat Newtons wetten aanzienlijk moeten worden aangepast bij snelheden die die van het licht naderen.





Elektromagnetische velden

lading, flux en handregels

Lading gedraagt zich in een elektromagnetisch veld net zoals massa in een zwaartekrachtveld. De kracht **F** op een bewegende lading Q in een elektromagnetisch veld met sterkte **E** is **F** = **E**Q. De kracht op een draad van lengte l waardoor stroom I loopt, is **F** = **B**Il, waarbij **B** de *magnetische fluxdichtheid* is (in *tesla*). Voor andere situaties, zie rechts (μ_0 is de doorlaatbaarheid van het vacuüm, de magnetische constante). Vetgedrukte kwantiteiten zijn vectoren, met zowel richting als grootte.

Een puntlading Q met snelheid v creëert een magnetisch veld **B** (*linksboven*). Als punt P op afstand r van Q is, in een hoek ϑ ten opzichte van zijn bewegingsrichting, dan stelt de *wet van Biot-Savart* dat:

$$\mathrm{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Qv\sin\vartheta}{r^2}$$

Een bewegend magnetisch veld produceert een elektrisch veld en vice versa. Met magneten en stroom in spoelen kan elektrische energie worden omgezet in mechanische energie (*motor*) en omgekeerd (*dynamo*); respectievelijk volgens Flemings linker- en rechterhandregels (*rechts, onder*).

Twee handige wetten zijn de *inductiewet van Faraday* (een van Maxwells vier vergelijkingen), die stelt dat de opgewekte elektromotorische kracht in een gesloten circuit afhangt van de mate van verandering van magnetische flux, of r $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$, waarbij $\nabla\times$ de rotatieoperator is, en de *wet van Lenz*, die stelt dat een opgewekte stroom altijd tegengesteld gericht is aan de beweging of verandering die hem veroorzaakt.