Hoewel de gulden snede altijd heeft bestaan in de wiskunde, meetkunde en de natuur is het niet bekend wanneer de mens deze voor het eerst ontdekte en toepaste. Je kunt er redelijkerwijs van uitgaan dat deze in de loop van de geschiedenis is ontdekt en herontdekt, wat verklaart waarom er verschillende namen voor zijn. Er is overtuigend bewijs dat de gulden snede bewust werd toegepast door de oude wiskundigen uit Babylon en India. Maar laten we beginnen met Griekenland.

Rechts: *Op dit schilderij van de Russische kunstenaar Fjodor Bronnikov (1827-1902) vieren pythagoreeërs de zonsopkomst.*

Links: *Op deze gravure van Jean Dambrun (1741-ca. 1808) staat Pythagoras die wordt weergegeven op een derde-eeuwse Romeinse munt.*

HET OUDE GRIEKENLAND

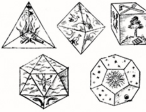
De ontdekkingen van de oude Grieken vullen het grootste deel van de huidige meetkundeboeken, en de eerste verwijzingen naar wat wij kennen als de gulden snede stammen mogelijk uit de tijd van Pythagoras, een wiskundige en filosoof die leefde van 570–495 v.Chr. Het pentagram, de vijfpuntige ster waarin de lengte van elk lijnstuk een gulden verhouding heeft met elk ander lijnstuk, zoals hieronder staat weergegeven, zou het symbool van zijn school zijn geweest en hij en zijn volgelingen zouden als eersten enkele unieke eigenschappen van de gulden snede hebben ontdekt.

Links: *De gulden snede van het pentagram.*

Rechts: *De verhoudingen tussen het rode en het groene lijnstuk, het groene en het blauwe lijnstuk en het blauwe en het paarse lijnstuk zijn alle gelijk aan phi (Φ).*

Onder: *Deze illustratie van de vijf platonische lichamen en bijbehorende elementen staat in Johannes Keplers* Mysterium Cosmographicum *(1596).*

De vijfhoek midden in het pentagram verschijnt in het werk van de beroemde Griekse filosoof Plato (ca. 427–347 v.Chr.), namelijk in zijn dialoog *Timaeus*, uit circa 360 v.Chr. die een kosmos beschrijft die bestaat uit vier elementen die worden vertegenwoordigd door vier fundamentele meetkundige lichamen (nu de platonische lichamen genoemd). Het vijfde lichaam is de dodecaëder die bestaat uit twaalf vijfhoeken en die de vorm van de kosmos weer zou geven. In zijn dialoog schreef Plato ook over een middelste relatie tussen drie getallen die een directe voorloper kan zijn van Euclides' 'uiterste en middelste reden':

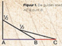


Euclides gaf ons een prachtige basis voor inzicht in de vele verschijningsvormen van de gulden snede in de meetkunde. Maar we kunnen het nog eenvoudiger maken. Er zijn nog andere eenvoudige meetkundige constructies die kunnen worden gebruikt om een gulden snede te krijgen, te beginnen bij het lijnstuk en dan de driezijdige driehoek, het vierzijdige vierkant en de vijfzijdige vijfhoek. Anders dan bij een top 10-lijstje begin ik met degene die misschien wel het verbazingwekkendste is vanwege zijn pure eenvoud. (Ik noem deze methode 'ongelofelijk eenvoudig en eenvoudigweg ongelofelijk'.)

DRIE LIJNSTUKKEN

Als Euclides deze elegante constructie had gezien, was hij en niet Archimedes waarschijnlijk de geschiedenis in gegaan als degene die naakt door de straten rende en 'eureka' riep.

1. Neem drie stokjes (tandenstokers, eetstokjes, rietjes e.d.) van gelijke lengte.
2. Leg de eerste verticaal neer.
3. Leg de tweede tegen het middelpunt van de eerste.
4. Leg de derde tegen het middelpunt van de tweede, zodat één uiteinde van elke stok op één lijn ligt, zoals op de tekening.



Figuur 1. De gulden snede van lijnstuk AC is punt B.

DRIE ZIJDEN: DRIEHOEK

Hier is nog een meetkundige constructie die eenvoudiger is dan die van Euclides.

1. Teken met een passer een cirkel. Teken hier een gelijkzijdige driehoek in.
2. Trek een lijn door het midden van twee zijden van de driehoek en trek hem door naar de rand van de cirkel, zoals hieronder.

Figuur 2. De gulden snede van lijnstuk AC is punt B.

VIER ZIJDEN: VIERKANT

Deze constructie houdt nauw verband met Euclides' stellingen die een boog toepassen op het middelpunt van een vierkant, maar wij doen het andersom.

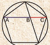
1. Teken met een passer een cirkel. Verdeel deze in twee halve cirkels.
2. Teken een vierkant in één halve cirkel.

Figuur 3. In deze constructie is de gulden snede van lijnstuk AC, weer punt B.

VIJF ZIJDEN: VIJFHOEK

Deze constructie is de eerste in *Elementen* en verschijnt als Stelling 8 in Boek XIII.

1. Teken met een passer een cirkel. Teken daarin een vijfhoek door vijf punten met gelijke tussenruimte op de cirkel te verbinden.
2. Verbind twee van de hoekpunten met een lijn en verbind nog twee hoekpunten met een lijn, zoals op de tekening.



Figuur 4. De gulden snede van lijnstuk AC is punt B, waar de twee lijnen elkaar snijden.

Zie je hoe makkelijk dit is? Gulden sneden lijken moeiteloos vanzelf te verschijnen. Zie Bijlage B voor meer meetkundige constructies van de gulden snede.

PYTHAGORAS EN KEPLER GAAN NAAR... EEN DRIEHOEK?

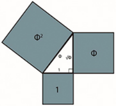
Ken je de mop die begint met 'Pythagoras en Kepler gaan naar een bar'? Waarschijnlijk niet, maar zoals je zult zien, helpen de bevindingen van deze twee historische wiskundigen om een van de unieke eigenschappen van de gulden snede te illustreren. Naast pentagrammen, is Pythagoras vooral bekend vanwege zijn stelling, die inhoudt dat een rechte driehoek met zijden met lengte a, b en c (waarbij c de hypotenusa is) de volgende relatie heeft:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Uit de inleiding weten we ook dat phi het enige getal is waarvan het kwadraat één meer is:

$$\Phi + 1 = \Phi^2$$

Tweeduizend jaar nadat Pythagoras zijn beroemde stelling bedacht, merkte de Duitse wiskundige Johannes Kepler (1571–1630) de overeenkomst tussen deze twee vergelijkingen op. Dit leidde tot zijn ontdekking van een unieke driehoek, die nu bekendstaat als de driehoek van Kepler, met zijden die gelijk zijn aan 1, $\sqrt{\Phi}$ en Φ.



Dit portret van Johannes Kepler uit 1610 van een onbekende schilder komt uit een benedictijns klooster in Kremsmünster, Oostenrijk.

Op de vorige bladzijden hebben we gezien dat er schoonheid schuilt in wiskunde, maar zoals de Italiaanse monnik Luca Pacioli scherpzinnig heeft opgemerkt, er ligt ook wiskunde verscholen in schoonheid. Europa maakte omstreeks het jaar 1120 opnieuw kennis met Euclides' *Elementen* in een Latijnse vertaling; na de uitvinding van de drukpers, omstreeks 1450, werd het een van de wijdstverspreide boeken. Hoewel er pas vanaf 1490 schriftelijke verwijzingen naar de gulden snede zijn verschenen, is er duidelijk en onmiskenbaar bewijs dat de beroemdste schilders uit deze periode al vanaf 1440 deze verhouding gingen toepassen in hun werken. De toepassing van de gulden snede in de kunsten gold later als een 'geheime wetenschap' waarin, zoals we zullen zien, veel renaissancemeesters waren ingewijd, onder wie Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Botticelli, Rafaël en Michelangelo. Maar het was Pacioli die als eerste een diepgaande studie maakte van wat hij 'de goddelijke verhouding' noemde.

Dit schilderij uit 1495 toont de franciscaner monnik Pacioli in zijn pij; hij tekent een wiskundig diagram terwijl zijn linkerhand rust op een open boek. Op de rechterhoek van zijn tafel ligt een dodecaëder. De jongeman achter hem is waarschijnlijk een leerling, misschien de Duitse kunstenaar en geleerde Albrecht Dürer, die als jonge twintiger Italië bezocht, juist in de tijd dat dit schilderij werd gemaakt.

GODDELIJKE PROPORTIES

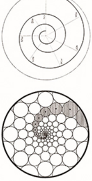
Luca Pacioli leefde van 1447 tot 1517. Deze veelzijdig getalenteerde franciscaner monnik was een wiskundige en goed bevriend met Leonardo da Vinci, met wie hij samenwerkte. Pacioli staat bekend als de grondlegger van de boekhoudkunde en schreef als eerste Europeaan een gedetailleerd werk over dubbele boekhouding. Kort na de publicatie van zijn zeshonderd pagina's tellende *Summa de arithmetica* (samenvatting van de rekenkunst) in 1494 ging hij op uitnodiging van hertog Ludovico Sforza in Milaan wonen. Hier ontmoette hij Leonardo, die wiskundelessen bij Pacioli volgde terwijl deze werkte aan *De divina proportione*, over de goddelijke verhouding. In dit boek, geschreven tussen 1496 en 1498 en gepubliceerd in 1509, legde Pacioli het verband tussen wiskunde, kunst en architectuur en onderzocht hij de aanwezigheid en toepassing van phi door de eeuwen

De titelpagina's van Pacioli's Summa de arithmetica *en* De divina proportione*; rechts Ludovico Sforza, mecenas uit de laatste, uiterst productieve fase van de Milanese renaissance. Hij steunde kunstenaars, bracht Pacioli en Leonardo da Vinci met elkaar in contact en gaf Leonardo omstreeks 1495 opdracht tot* Het laatste avondmaal.

Onder: *Een Archimedes-spiraal met een constante afstand tussen de krommen is per ongeluk afgebeeld onder aan Jacob Bernoulli's grafbord in het munster van Bazel; de Zwitserse wiskundige had hier zijn* spira mirabilis *gewenst, waarin de afstand tussen de krommen in een constant tempo toeneemt.*

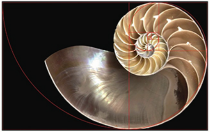
DE WONDERBARE SPIRAAL

De logaritmische spiraal werd voor het eerst omschreven door de Franse wiskundige en filosoof René Descartes (1596–1650). De Zwitserse wiskundige Jacob Bernoulli (1654–1705) was zozeer in de ban van de unieke wiskundige eigenschappen dat hij hem beschreef als de *spira mirabilis*, Latijn voor 'wonderbare spiraal'. Terwijl de spiraal steeds groter wordt, blijft de vorm gelijk omdat hij zich uitbreidt met een constant tempo in geometrische groei. Deze wonderbare logaritmische spiraal is alom in de natuur te vinden, in levende wezens maar ook in wervelstormen, melkwegstelsels en andere natuurverschijnselen.



Boven: *Logaritmische spiralen kunnen dienen ter beschrijving van een steeds stijgende toon (boven) of het groeipatroon van bloemen (onder).*

Omdat deze logaritmische spiralen zo vaak voorkomen en zo sterk tot de verbeelding spreken, zijn er enkele misverstanden ontstaan op dit gebied. Veel mensen menen ten onrechte dat alle logaritmische spiralen ook gulden spiralen zijn, die groeien met een factor 1,618. In feite is de gulden spiraal een uitzonderlijk voorbeeld van een logaritmische spiraal, zoals een appel een soort vrucht is, of zoals een pentagoon een van de vele veelhoeken is. Alle echte gulden spiralen zijn logaritmische spiralen, maar niet alle logaritmische spiralen zijn gulden spiralen, net zoals alle appels vruchten zijn, maar niet alle vruchten appels. Een van de misverstanden betreft de nautilusschelp met zijn fraaie, herkenbare spiraal. Zowel de nautilusspiraal als de gulden spiraal van op elkaar volgende gulden rechthoeken wordt vaak als illustratie voor de gulden snede gebruikt. In feite wijken de verhoudingen van de nautilusspiraal af van die van de gulden spiraal, zoals op de foto hieronder te zien is.



Omdat deze twee verschillende logaritmische spiralen allebei als gulden spiralen worden aangemerkt, hebben wiskundigen en wetenschappers met wantrouwen en wrevel gereageerd op de boude stellingen over het veelvuldig voorkomen van de gulden snede in de natuur en kunst. Deze phi-sceptici plaatsten artikelen op internet, waarin ze betoogden dat het nautilusverhaal niet klopt en exemplarisch is voor alle onjuiste verhalen over de gulden snede. Zelfs beroepswiskundigen mengen zich in de discussie. Een van deze wiskundigen stelt dat de spiraal van de nautilusschelp eerder groeit met een factor 43. Een andere bekende wetenschapper, die bekendstaat om zijn briljante sculpturen van