WISKUNDIG BEWIJS

Bewijs is het levensvocht van de moderne wiskunde. Elke stelling moet worden bewezen in correcte logische stappen te beginnen met eerder vastgestelde wiskundige waarheden.

- **5e tot 6e eeuw v.Chr.** Thales en Hippocrates bewijzen vroege geometrische stellingen.
- **300 v.Chr.** Euclides begint met het deduceren van bewijs uit axioma's.
- **10e eeuw n.Chr.** Islamitische geleerden ontwikkelen algebraïsch bewijs.
- **1976** Kenneth Appel en Wolfgang Happel bewijzen de vierkleurenstelling.
- **1994** Andrew Wiles bewijst de laatste stelling van Fermat.
- **2006** Grigori Perelman bewijst het vermoeden van Poincaré.

WAT IS HET?

Of het nu de **stelling van Pythagoras** is of het **vermoeden van Poincaré**, de **regels van de wiskunde** zijn zo goed als hun **bewijs**. Bewijzen nemen verschillende vormen aan, van eenvoudigweg aantonen dat iets **bestaat** (zoals een oplossing van een vergelijking) tot het bewijzen van een **unicum** (bijvoorbeeld dat een oplossing de enige oplossing is), of een **algemeen feit** bewijzen (dat $\sqrt{2}$ irrationaal is).

HOE?

Methoden zijn **deductie** (waarbij uit één stap de volgende volgt), **reductio ad absurdum** (bewijzen dat als een stelling niet waar is een **contradictie** het resultaat is) en **inductie** (waarbij een resultaat **wordt bewezen in een enkel geval**, $n = 0$, en dan wordt bewezen dat dit in het algemeen geldt als $n \rightarrow n + 1$).

De mogelijkheid om te **bewijzen dat iets 100 procent waar is** in de wiskunde staat in **schril contrast met de natuurwetenschappen**, waar theorieën **alleen maar ongeldig kunnen worden bewezen**.

NIET BEWEZEN PROBLEMEN

Er zijn wiskundige ideeën die **nog formeel moeten worden bewezen**. De belangrijkste van deze zijn de zes **Millenniumprijsproblemen**, vastgesteld door het **Clay Mathematics Institute**. Er is een prijzengeld van **$1 miljoen**.

P vs NP: als een oplossing van een probleem snel kan worden gecontroleerd, kan het ook snel worden gevonden?

Het vermoeden van Hodge: dat bepaalde 'homologe klassen' in een arbitraire ruimte algebraïsch zijn.

Riemann-hypothese: dat elk niet-triviale nulpunt van de Riemann-zèta-functie een 'echte' component van ½ heeft.

Yang-Mills-theorie, existentie en massaverschil: dat de vergelijkingen die de sterke nucleaire kracht binnen de atoomkernen bepalen kunnen worden opgelost.

Navier-Stokesvergelijkingen: bewijs het bestaan van gladde oplossingen van de Navier-Stokesvergelijkingen van vloeistofdynamica.

Vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer: hebben elliptische curven een eindig of oneindig aantal rationale oplossingen?

EUCLIDES

Euclides' boek Elementen *werd lange tijd beschouwd als de definitieve tekst over wiskunde. Einstein noemde het zijn 'kleine heilige meetkundeboek'.*

'SLECHTS EUCLIDES ZAG SCHOONHEID ONVERHULD.' EDNA ST. VINCENT MILLAY (AMERIKAANSE DICHTER)

WIE WAS EUCLIDES?

Er is weinig bekend over deze **Griekse geleerde** die werd geboren in de 4e eeuw v.Chr. en het grootste gedeelte van zijn leven docerend en studerend doorbracht in **Alexandrië, Egypte**.

Zijn naam is het Griekse woord voor **'bekend'** of **'roemrijk'**.

In de oudheid werd hij echter nauwelijks bij naam genoemd en verwees men naar hem als de **'schrijver'** van de *Elementen*.

Door de eeuwen heen is hij bekend komen te staan als de **'vader van de meetkunde'**.

Hij stierf in het midden van de 3e eeuw v.Chr.

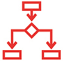
ELEMENTEN

Euclides' *Elementen* vatte alle voorgaande wiskundige theorieën en leerstellingen samen, waaronder het werk van **Eudoxus**, **Pythagoras**, en **Hippocrates**.

1, 2, 3...

Het boek is ook een van de eerste verhandelingen over **getaltheorie** en onderzoekt **gehele getallen**, **priemgetallen** en **perfecte getallen**.

Hij legde hierin de basis voor de meetkunde, de leer van de vormen, en maakte hierbij slechts gebruik van een **passer** en een **richtliniaal**. Euclides zette **honderden stellingen** uiteen.



Euclides' methode voor het vinden van de **grootste gemene deler van twee getallen** is een vroeg voorbeeld van een **'algoritme'**.

NALATENSCHAP

Moderne, **geavanceerde meetkundige ideeën** zoals **gekromde ruimtes** en **differentiaalmeetkunde** zijn allemaal afgeleid van het vroege werk van Euclides.

De **satelliet** Euclides van de **Europese Ruimtevaartorganisatie** is ontworpen om de **afmetingen van het universum** te begrijpen.

IMAGINAIRE GETALLEN

Ondanks hun naam zijn imaginaire getallen zo reëel als iedere andere wiskundige entiteit. Tegenwoordig worden ze gebruikt in de bouwkunde, zuivere wiskunde en natuurkunde.

OORSPRONG VAN KWAAD

Stel je voor dat je de vergelijking $x^2 = -1$ moet oplossen. Je verwacht de vierkantswortel aan beide kanten te trekken om een waarde voor x te krijgen, maar in dit geval is het resultaat: $x = \sqrt{(-1)}$. Het probleem is dat de vierkantswortel van een negatief getal niet bestaat – trek **de wortel van een willekeurig getal en je krijgt een positief getal.** Wiskundigen deden deze

DE IMAGINAIRE EENHEID

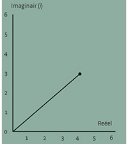
gevallen niet af als betekenisloze curiositeiten, maar creëerden de entiteit i om $\sqrt{(-1)}$ aan te geven en behandelden het als elk ander getal. Het heeft de eigenschappen

i^2	-1
i^3	-i
i^4	1
i^5	i
i^6	-1

Als je i gebruikt, kun je de vierkantswortel van elk negatief getal schrijven. Bijvoorbeeld: $\sqrt{(-16)} = \sqrt{16} \times \sqrt{(-1)} = 4i$.

COMPLEXE GETALLEN

In de moderne wiskunde kunnen getallen reële en imaginaire gedeeltes hebben. Dit worden complexe getallen genoemd. Deze worden meestal gerepresenteerd op een 2D-vlak, waarbij de verticale as correspondeert met het imaginaire gedeelte en de horizontale met het reële. Dus het complexe getal $4 + 3i$, ziet er zo uit:



Deze meetkundige voorstelling staat bekend als een **Argand-diagram**, naar de **Zwitserse wiskundige Jean-Robert Argand**.

1572 De Italiaanse wiskundige Rafael Bombelli zet de regels voor imaginaire getallen uiteen.

1637 Descartes schrijft over imaginaire getallen in zijn boek *La Géométrie*.

1748 Euler laat zien hoe complexe getallen kunnen worden gebruikt om golven voor te stellen.

1777 Leonhard Euler gebruikt voor het eerst het symbool i om naar $\sqrt{(-1)}$ te verwijzen.

1843 William Rowan Hamilton breidt 2D-complexe getallen uit naar 4D-'quaternions'.

i, j, k

HET VERMOEDEN VAN KEPLER

De Duitse wiskundige Johannes Kepler wist wat de meest efficiënte manier was om een stapel appels in een doos te stapelen, maar het duurde nog vierhonderd jaar voor hij gelijk kreeg.

ESSENTIE VAN HET PROBLEEM

Gooi een aantal bollen willekeurig in een doos en ze zullen zichzelf zo rangschikken dat ze 0,65 van het volume van de doos innemen (de overige 0,35 is de ruimte tussen de bollen).

Het is echter mogelijk om het beter te doen. Als je de bollen in een vlakgecentreerde kubus (vgk) of een hexagonale dichtste stapeling (hds) plaatst, dan nemen ze

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}740480489...$$

van het beschikbare volume in de doos in.

Het vermoeden van Kepler stelt vast dat dit de beste manier is om zoiets te doen. Er is geen efficiëntere manier om bollen in een doos te stapelen.

Vlakgecentreerde kubus (links) en hexagonale dichtste stapeling (rechts)

WIE WAS KEPLER?

Geboren op 27 december 1571 in Weil der Stadt, Duitsland.

Kepler wordt aangesteld als keizerlijke wiskundige van Keizer Rudolf II van het Heilig Roomse Rijk in 1601.

Hij publiceert de eerste van zijn wetten over de beweging van de planeten in 1609.

Hij formuleert het vermoeden van Kepler in 1611 als onderdeel van een werk over hexagonale symmetrie van sneeuwvlokken.

Gestorven 15 november 1630 in Regensburg, Duitsland.

HOE WERD HET BEWEZEN?

In augustus 2014 werd het vermoeden eindelijk bewezen door Thomas Hales, die in een team van 21 andere onderzoekers werkte aan de universiteit van Pittsburgh. Het was uiteindelijk een bewijs door gevalsonderscheiding, waarbij het volume van elke mogelijke ordening van de bollen werd gecontroleerd door een computer.

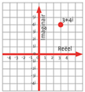
QUATERNIONEN

Quaternionen breiden complexe getallen uit naar hogere dimensies. Ze hebben toepassingen in het beschrijven van rotatie in mechanica en worden gebruikt in theoretische fysica.

ARGAND-DIAGRAMMEN

Complexe getallen bestaan uit een **reëel gedeelte** en een **imaginair gedeelte**, meestal in de vorm van $z = a + bi$, waarbij i de imaginaire eenheid is, zo gedefinieerd dat $i^2 = -1$, en a en b zijn gewone reële getallen.

Complexe getallen kunnen worden ingetekend op een **tweedimensionaal vlak**, een **Argand-diagram** genaamd, met een **reële component** op de **horizontale as** en een **imaginaire component** op de **verticale as**.



WAT ZIJN QUATERNIONEN?

De 19e-eeuwse Ierse wiskundige **William Rowan Hamilton** vroeg zich af of het mogelijk was om een **extra imaginaire component** toe te voegen en het **Argand-vlak** uit te breiden naar **drie dimensies**.

Hij kwam er echter achter dat de wiskunde alleen werkte door **twee extra imaginaire dimensies** toe te voegen. Hamiltons **nieuwe complexe getallen** hebben de algemene vorm $z = a + bi + cj + dk$, waarbij a, b, c en d reële getallen zijn en i, j en k verschillende imaginaire eenheden die gehoorzamen aan de relatie:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Hamilton noemde zijn vierdimensionale complexe getallen 'quaternionen'.

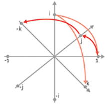
HOE WERKEN ZE?

De onderstaande definitie impliceert dat

$ij = k$, $ji = -k$,
$jk = i$, $kj = -i$,
$ki = j$, $ki = -j$.

Het vermenigvuldigen van quaternionen **is niet commutatief**, d.w.z. ij is niet hetzelfde als ji.

Quaternionen beschrijven rotatie, aangezien **het effect van het vermenigvuldigen van een zuiver imaginaire j met een i gelijkstaat aan het roteren van de j in de k-richting**.



TOEPASSINGEN

Rotatie: het vermogen van quaternionen om rotatie te beschrijven heeft geleid tot hun gebruik in **computeranimaties** en **vliegtuignavigatie**.

Fysica: quaternionen kunnen worden gebruikt om **elektromagnetisme te formuleren en zijn analoog aan de matrices die de rotatie van subatomaire deeltjes in de kwantumtheorie beschrijven**.

OCTONIONEN

De **octonionen** zijn **een uitbreiding van quaternionen** van **vier naar acht dimensies**. Ze zijn een gewild onderzoeksthema. Men verwacht dat ze **inzichten zullen bieden in de ongrijpbare unificatie van zwaartekracht en kwantumfysica**.

HET VERMOEDEN VAN CATALAN

Deze stelling in de getaltheorie werd ontwikkeld in 1844 door de in België geboren wiskundige Eugène Charles Catalan en werd uiteindelijk in 2002 bewezen.

HET VERMOEDEN

Catalan merkte op dat de **getallen 8 en 9 kunnen worden geschreven als respectievelijk 2^3 en 3^2**. Dat betekent dat twee integers, die beide tot integere machten worden verheven, twee opeenvolgende integers geven. Zijn vermoeden was dat, **met de uitzondering van 0 en 1, 2 en 3 de enige twee machten zijn waarvoor dit mogelijk is.**

Het probleem kan worden geformuleerd door middel van de **diofantische vergelijking**,

$$x^a - y^b = 1$$

en komt erop neer dat de **enige oplossing voor *a* en *b* beide groter dan 1 is**

$$a = 2, b = 3, x = 3, y = 2$$

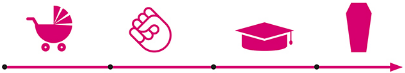
1343 Het vermoeden is waarschijnlijk bekend aan de Franse geleerde Gersonides.

1844 Catalan formuleert zijn probleem.

1976 De Nederlandse wiskundige Robert Tijdeman is in staat om de grenzen vast te stellen van a, b, x en y.

2002 Het vermoeden van Catalan wordt eindelijk bewezen door de Roemeense wiskundige Preda Mihăilescu, 158 jaar nadat het probleem voor het eerst werd geformuleerd.

EUGÈNE CHARLES CATALAN



1814 Catalan wordt geboren op 30 mei in Brugge als zoon van een juwelier.

1848 Catalan heeft sterke politiek-linkse overtuigingen en neemt deel aan de Revolutie.

1865 Hij wordt hoofd van de afdeling **wiskundige analyse van de universiteit van Liège**.

1894 Catalan **sterft** op 14 februari in de Belgische stad Liège.

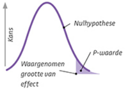
P-WAARDE

Een p-waarde is een kans, berekend uit experimentele gegevens, dat een hypothese waar of onwaar is. Maar veel statistici zijn van mening dat ze worden misbruikt en fout geïnterpreteerd.

WAT ZIJN ZE?

Meestal worden ze **geformuleerd in termen van een hypothese**, *H*, en wordt er een **relatie tussen kwantiteiten** onderzocht.

De **p-waarde** is de **kans dat we experimentele resultaten zouden zien gelijk aan of meer dan we zouden zien als er geen relatie zou zijn**. De theorie dat er geen relatie is tussen de waargenomen hoeveelheden wordt soms de **nulhypothese** genoemd, H_0.



Met andere woorden: de **p-waarde is de kans dat de resultaten stom geluk** zijn.

STATISTISCHE RELEVANTIE

In het verleden worden p-waarden gebruikt als de vuurproef voor de statistische interpretatie van experimentele data.

Een p-waarde van 0,05 of minder, de **kans op zulke resultaten door puur geluk** is gelijk aan of kleiner dan 5 procent, is het **criterium** geworden om te claimen dat het bewijs voor *H* **statistisch significant** is.

WAT IS ER MIS MEE?

Het probleem is tweeledig. Allereerst is de **drempel van 0,05 voor significantie arbitrair**. Als je twintig verschillende hypothesen bedenkt zal **gemiddeld** een ervan een p-waarde hebben die statistisch significant is.

Ten tweede: de **p-waarde is niet de kans dat *H* onwaar is Dus een lage p-waarde betekent niet noodzakelijk een hoge kans dat je hypothese waar is**.

Waarheidstabel	H_0 waar	H_0 onwaar
Test zegt accepteer H_0	☺	☹
Test zegt verwerp H_0	☹	☺

CRISIS VAN DE HERHALING

Misbruik en slechte interpretaties van p-waarden hebben wellicht bijgedragen aan de zogenaamde **crisis van de herhaling**, het feit dat **vele pogingen om gepubliceerde onderzoeken in de sociale wetenschappen te herhalen zijn mislukt**. De implicatie is dat de **statistische analyse**, die werd gebruikt om de resultaten in de originele studies af te leiden, **gemankeerd** was.

MODERNE STATISTISCHE INFERENTIE

P-waarden worden beschouwd als een verkeerde statistische manier van denken voor het interpreteren van experimentele data. Een alternatieve techniek is gebaseerd op de stelling van Bayes.

VOORBIJ DE P-WAARDEN

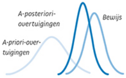
Onderdeel van het probleem met p-waarden is dat ze je de **voorwaardelijke kans** op het waarnemen van data, *D*, vertellen, gegeven het feit dat de hypothese, *H*, waar is, d.w.z. *p(D|H)*. Maar wat wetenschappers echt willen weten is *p(H|D)* – de kans dat de hypothese waar is gegeven de data.

Deze twee kwantiteiten zijn gerelateerd aan de stelling van Bayes.

$$p(H|D) = \frac{p(D|H)p(H)}{p(D)}$$

En zo kan *p(H|D)* (de *a-posteriori*-**kansen**) worden berekend in termen van *p(D|H)* (het **bewijs**) en onze eerdere verwachtingen over de hypothese (de *a-priori*-**kansen**).

BAYESIAANSE INFERENTIE



Laten we zeggen dat de hypothese te maken heeft met de **waarde van een parameter** in een model. Dan representeren de **a-priori-overtuigingen** een **kansverdeling** voor wat we aanvankelijk geloven over de waarde van de parameter, waarbij de **piek van de verdeling** de **meest waarschijnlijke waarde** aangeeft. **Het bewijs geeft ons dan een andere verdeling**. En de stelling van Bayes vertelt ons hoe we de **a-priori-overtuigingen** en de waarschijnlijkheid van een **nieuwe kansverdeling** moeten verenigen, die dan onze **nieuwe a-posteriori-overtuigingen** weergeven.

BETROUWBAARHEIDSINTERVAL

Bayesiaanse inferentie maakt een flexibele interpretatie van data mogelijk, in plaats van de binaire ja/nee-uitkomst van een **p-waardetest**.

De **a-posteriori-kansverdeling** voor *H* stelt een wetenschapper in staat te vragen "wat is het **meest waarschijnlijke bereik van waarden** waar *H* zich bevindt?". Beperkingen als deze staan bekend als de **betrouwbaarheidsintervallen**.

Je kunt bijvoorbeeld voor de verdeling berekenen welk bereik van *H* 95 procent van de kans omvat. Dit zou een betrouwbaarheidsinterval van 95 procent zijn.

Maar betrouwbaarheidsintervallen kunnen breder zijn (99 procent bijv.) of smaller (90 procent bijv.) afhankelijk van het gestelde probleem.