WISKUNDE & LOGICA

- Inleiding tot de logica -

Luc Stevens

Een stelling is gemakkelijker te weerleggen dan op te stellen.

- Aristoteles -

Copyright

Luc Stevens
Wiskunde & Logica

Uitgegeven in eigen beheer
(ISBN: 9789403609256)
D/2020/Luc Stevens, uitgever

Inhoud

Deel 1: **Opbouw van de wiskunde** p.9

Grondbegrip – Definitie – Eigenschap – Axioma – Postulaat
Stelling – Kenmerk – Conjectuur

Deel 2: **Logica - Begrippen en definities** p.12

Proposities – Premissen – Conclusies – Syllogisme
Absurditeit – Sofisme – Antinomie – Paradox
Deductie – Inductie – Evidentie
Analytisch – Empirisch

Deel 3: **Symbolische logica** p.24

Bivalente logica – Booleaanse logica – Multivalente logica
Negatie – Conjunctie – Disjunctie – Implicatie – Equivalentie
Waarheidstabellen – Operatoren
Tautologie – Consistentie – Contingentie – Inconsistentie
Collectieve negatie – Alternatieve negatie
Theorema – Wetten van De Morgan – Modus – Contrair – Subcontrair

Deel 4: **Toepassingen van symbolische logica** p.50

A. Verzamelingenleer

Unie – Intersectie – Verschil – Symmetrisch verschil – Complement

B. Schakelingen

Logische schakeling – Canonische vorm – Boole-algebra – Waarheidsfuncties

Deel 5: **Predicatenlogica** p.65

Subject – Predicaat – Propositionele functie
Universele kwantor – Existentiële kwantor
Unicitaire kwantor – Non-existentiële kwantor
Gekwantificeerde uitspraken – Conjuncties van gekwantificeerde uitspraken
Theorema's van de predicatenlogica – Redeneren met predicatenlogica
Singulier oordeel – Identiteit – Differentie
Relaties – Oordeelsvormen van Aristoteles
Wederkerigheid van uitspraken – Cirkels van Euler
Fouten in redeneringen

Deel 6: **Bewijsmethoden in de wiskunde** p.100

Direct bewijs – Indirect bewijs – Existentiebewijs
Bewijs uit het ongerijmde – Exhaustiebewijs – Tegenvoorbeeld
Bewijs door volledige inductie

Addendum:
- **De gebruikte logische symbolen** p.103
- **Theorievragen** p.104
- **Logische puzzels** p.106

Met veel dank aan Hilde en Katrien.

Deel 1: **Opbouw van de wiskunde**

Grondbegrip – Definitie – Eigenschap – Axioma – Postulaat – Stelling

1. In wiskunde werken we met begrippen. Deze begrippen worden gedefinieerd. Een wiskundige **definitie** is een ondubbelzinnig omschrijven van een nieuw begrip, uitsluitend steunend op voorafgaande begrippen.

   bv. definitie van een parallellogram:
   Een parallellogram is een vierhoek met minstens 2 paar evenwijdige zijden.
   Hierbij gaat men uit van de veronderstelling dat de begrippen 'vierhoek', 'evenwijdig' en 'zijde' reeds gedefinieerd zijn.

   bv. definitie van een zijde van een vierhoek:
   Een zijde van een vierhoek is een lijnstuk dat twee opeenvolgende hoekpunten verbindt.

   Een lijnstuk is: *Een deel van een rechte met 2 grenspunten.* enz …

   Op deze manier steeds terugkerend naar vroeger omschreven begrippen zal men onvermijdelijk een moment bereiken waarop,

   - ofwel: geen gekende begrippen meer voorhanden zijn om het nieuwe begrip te definiëren,
   - ofwel: het domein van de wiskunde verlaten wordt.

   Als er geen begrippen meer voorhanden zijn, is het noodzakelijk om grondbegrippen te aanvaarden. Een **grondbegrip** is dus een begrip dat niet omschreven kan worden met reeds eerder gekende begrippen.

   bv. uit de meetkunde: punt, rechte, vlak, congruent, …

   Let op! Men zou wel bv. een vlak kunnen definiëren als: *Een onbegrensd oppervlak, met die eigenschap dat elke rechte die er twee punten mee gemeen heeft, erin ligt.*
   Het spreekt voor zich dat dan de begrippen 'oppervlak', 'rechte' en 'punt' hier als grondbegrippen beschouwd moeten worden.
   M.a.w. een definitie van de huidige grondbegrippen is altijd mogelijk op voorwaarde dat men dan andere begrippen als grondbegrippen aanvaardt.

   Men kan ook proberen grondbegrippen te definiëren en daardoor het domein van de wiskunde verlaten.

bv. definitie van:	'een punt'	*Snijding van twee rechten.*
	'een rechte'	*Snijding van twee vlakken.*
	'een vlak'	*Oppervlak dat plat is, dus geen kromming heeft.*
	'een oppervlak'	*De begrenzing van een lichaam.*
	'een lichaam'	*Al wat ruimte inneemt.*
	'ruimte' $\rightarrow$behoort tot het domein van de fysica	

   Grondbegrippen dienen dus zorgvuldig gekozen te worden!

2. Wiskunde is een deductieve wetenschap. Dit wil zeggen een wetenschap die bestaat uit een systeem van eigenschappen en stellingen en die men opbouwt met behulp van reeds gekende grondbegrippen en definities.

   Een **eigenschap** is een wiskundig oordeel waarvan men veronderstelt dat het waar is.

   Een **oordeel** is een uitspraak waarvan men kan zeggen of ze waar is of vals is; waarbij, in de wiskunde, een oordeel als waar wordt beschouwd als men het bewezen heeft.

   Een **stelling** (of **these**) is een eigenschap die men kan bewijzen.

Een stelling bewijzen is die stelling afleiden uit andere eigenschappen, waarvan de waarheid reeds vaststaat en waarbij men gebruik maakt van afgesproken definities en grondbegrippen.

bv. '*In een koordenvierhoek zijn de overstaande hoeken supplementair.*', is een stelling.

Om deze stelling te bewijzen voert men een logische redenering (zie deel 2), gebruik makende van:

* enerzijds: de definities van de begrippen 'koordenvierhoek', 'overstaande hoeken', en 'supplementair', die op hun beurt steunen op een aantal grondbegrippen.

* anderzijds: de vooraf gekende stelling *'Een omtrekshoek is de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat.'*

3. Aangezien stellingen steeds bewezen worden aan de hand van reeds eerder gekende begrippen en eigenschappen, zal men ook hier een punt bereiken waarop geen stellingen meer voorhanden zijn, zodat men zijn toevlucht zal moeten nemen tot axioma's en postulaten.

Een **axioma** of een **postulaat** is een eigenschap die men niet meer door middel van voorafgaande stellingen kan bewijzen.

Iedereen kent het beroemde vijfde postulaat uit de 'Elementen' van **Euclides**.
(Euclides van Alexandria ° ±325 v. Chr. † Alexandria / ±265 v. Chr.)

Door elk punt van het vlak niet op een rechte gelegen, kan men slechts één rechte tekenen die evenwijdig is aan de gegeven rechte.

Euclides zelf plaatste dit postulaat niet meteen vooraan in zijn 'Elementen' bij de andere postulaten en axioma's, omdat hij waarschijnlijk van oordeel was dat er misschien nog iemand na hem het bewijs van deze eigenschap zou kunnen vinden. Tal van wiskundigen hebben dit dan ook geprobeerd. **Gauss** (1) was één van de eerste wiskundigen die bewees dat het beroemde 5de postulaat van Euclides onbewijsbaar is! Deze theorie gaf aanleiding tot de niet-Euclidische meetkunde, waarin het 5de postulaat van Euclides niet werd opgenomen. Gauss maakte zijn ontdekking echter niet wereldwijd. Het zijn de wiskundigen **Lobatsjevski** (2) en **Bolyai** (3) die deze theorieën verder ontwikkelden tot wat we nu kennen als de 'hyperbolische meetkunde'. Ook **Riemann** (4), een leerling van Gauss, werd door deze laatste aangespoord om een andere niet-euclidische meetkunde op te bouwen - de zgn. 'elliptische meetkunde'. De meetkunde van Euclides wordt in dit verband ook wel eens de 'parabolische meetkunde' genoemd.

(1) (Carl Friedrich Gauss ° Braunschweig / 30 april 1777 † Göttingen / 23 februari 1855)
(2) (Nikolai Ivanovitsch Lobatsjevski ° Novgorod / 1 december 1792 † Kazan / 24 februari 1856)
(3) (János Bolyai ° Kolozsvár / 15 december 1802 † Marosvásárhely / 27 januari 1860)
(4) (Bernhard Riemann ° Breselenz / 17 september 1826 † Selasca / 20 juli 1866)

In de wiskunde maken we gebruik van een aantal axioma's en postulaten, waaruit we dan alle nodige stellingen kunnen afleiden.
Het spreekt vanzelf dat deze axioma's en postulaten niet willekeurig gekozen kunnen worden. Een axiomastelsel moet voldoen aan een aantal voorwaarden:

1) Het stelsel moet volledig zijn: d.w.z. men moet een voldoende aantal axioma's hebben, maar eveneens een noodzakelijk aantal.

   Er mogen dus enerzijds geen axioma's te weinig zijn om bepaalde stellingen te kunnen bewijzen en anderzijds kan het niet zijn dat een axioma bewijsbaar is uit de andere.

2) De verschillende axioma's in het stelsel mogen elkaar niet tegenspreken.

3) Het stelsel moet consistent zijn: d.w.z. indien men een stelling afleidt uit bepaalde axioma's en men leidt een andere stelling af uit diezelfde of uit andere axioma's van het stelsel, mogen deze stellingen geen aanleiding geven tot tegenstrijdigheden.

Opmerking: axioma's en postulaten hoeven niet 'evident' te zijn. M.a.w. ze hoeven niet te beantwoorden aan de werkelijkheid.

bv. het postulaat: '*Twee punten bepalen een rechte*', lijkt voor ons vanzelfsprekend, maar strikt wiskundig gesproken, hoeven we dit niet te aanvaarden.
Axioma's zijn slechts conventies (afspraken) die eventueel door andere te vervangen zijn.

In tegenstelling tot de opvatting van Lobatsjevski e.a. zijn de postulaten van Euclides wel evident gekozen. Bovendien maakte hij een onderscheid tussen een axioma en een postulaat.

Postulaat: heeft betrekking op een <u>meetkundige eigenschap</u>.
Axioma: eigenschappen die verband houden met <u>grootte</u> en <u>algebraïsche uitdrukkingen</u>.

Bij Euclides vinden we bv. de volgende postulaten:

* *Bij een gegeven lijnstuk kan men altijd een cirkel tekenen, waarvan dat lijnstuk de straal is.*
* *Alle rechte hoeken zijn congruent.*
* *Twee punten bepalen een rechte.*

en bv. de volgende axioma's:

* *Als men bij gelijke dingen gelijke voegt, zijn de totalen gelijk.*
(Bij beide leden van een gelijkheid mag men hetzelfde getal optellen.)
* *Dingen die op elkaar passen zijn gelijk.* (het begrip 'congruentie')
* *Het geheel is altijd groter dan het deel.*

Tegenwoordig wordt het onderscheid tussen een axioma en een postulaat niet meer gemaakt, of enkel nog afhankelijk van het beschouwde werk.

4. Wanneer een stelling bewezen is en eveneens de omgekeerde stelling geldt, spreken we van een **<u>criterium</u>**. (of een **<u>kenmerk</u>**)

   bv. *Elk punt van de middelloodlijn van een lijnstuk ligt even ver van de grenspunten.*
   Elk punt dat even ver ligt van de grenspunten van een lijnstuk, ligt op de middelloodlijn van dat lijnstuk. (criterium van de middelloodlijn)

5. Soms gebruikt men bij het bewijzen van een stelling een zgn. hulpstelling, een kleine stelling die men eerst bewijst en die dan gebruikt kan worden in het te voeren bewijs.
   Zo'n hulpstelling noemt men ook een **<u>lemma</u>**. (heel bekend zijn de lemma's van **Archimedes**)
   (Archimedes van Syracuse ° Syracuse / 287 v. Chr. † Syracuse / 212 v. Chr.)

6. Een eigenschap waarvan men veronderstelt dat ze altijd geldt, maar die men (nog) niet kan bewijzen, noemt men een **<u>conjectuur</u>**. (of een 'vermoeden') Een conjectuur wordt een stelling indien ze bewezen is, of vervalt indien er een <u>tegenvoorbeeld</u> gevonden wordt. (zie deel 6).

7. Er bestaan nog steeds verschillende conjecturen in de wiskunde.
   (een hele bekende is de conjectuur of het vermoeden van **Goldbach** i.v.m. de priemgetallen)
   (Christian Goldbach ° Köningsberg / 18 maart 1690 † Moskou / 20 november 1764)

8. Zodra men de nodige grondbegrippen, definities en axioma's heeft opgesteld, kan men overgaan tot het bewijzen van stellingen. In de wiskunde gebruikt men verschillende <u>bewijsmethoden</u>. (zie deel 6)
   Bij zo'n methode maakt men een logische redenering, die op haar beurt steunt op een aantal <u>redeneringsvormen</u>. De gemaakte redeneringen moeten wel geldig zijn, m.a.w. ze moeten correct gevoerd worden.

   De **<u>LOGICA</u>** is een tak van de wiskunde die zich hiermee bezighoudt.

<u>**Deel 2**</u>: <u>**Logica**</u> - <u>**Begrippen en definities**</u>

Wat is logica? In Van Dale lezen we:

De logica of redeneerkunde is een wetenschap die zich bezighoudt met de formele regels van het denken.

Traditioneel wordt de logica door de filosofie bestudeerd, maar wordt ook tot de wiskunde gerekend. Vermits wiskunde werkt met symbolische notaties, spreekt men ook in dit verband van **symbolische logica**. (of soms de **'formele logica'**)

Er zijn ook verschillende soorten logica, waarvan de propositielogica en de predicatenlogica de voornaamste zijn. We bespreken eerst de propositielogica.

Proposities – Premissen – Conclusies – Syllogisme

1. In de propositielogica werken we met proposities. Een <u>**propositie**</u> is een uitspraak, een bewering, die de vorm aanneemt van een oordeel (zie deel 1). M.a.w. men kan zeggen of ze waar is of vals. Een propositie kan niet <u>tegelijk</u> waar en vals zijn!

   Een propositie kunnen we uitdrukken in woorden (door middel van een <u>verklarende</u> volzin), of in symbolen (een wiskundige uitdrukking).

   Enkele voorbeelden:
   (1) Het regent.
   (2) Vijf plus drie is acht.
   (3) Waar is Jan?
   (4) Open de deur.
   (5) 7 + 2 = 5
   (6) Driehoek ABC is rechthoekig.

   Merk op:

   (3) is <u>geen</u> propositie, want de zin is een vraag en geen bewering.
   (4) is <u>geen</u> propositie, want de zin is een bevel.
   (2) is een propositie, want het is een verklarende volzin die waar is.
   (5) is een propositie, want het is een wiskundige uitdrukking die vals is.

   (1) en (6) zijn proposities, hoewel men niet met zekerheid kan zeggen of ze waar of vals zijn.
   Ze zijn namelijk afhankelijk van de situatie. (het weer – de getekende driehoek)
   Het is dus <u>geen vereiste</u> dat men steeds kan zeggen of de propositie waar of vals is. Het moet enkel <u>mogelijk</u> zijn.

2. Proposities worden onderverdeeld in twee categorieën: de premissen en de conclusies.

   Een <u>**premisse**</u> is een <u>gestelde</u> propositie, m.a.w. een <u>gegeven</u>.
   Van gegevens wordt altijd verondersteld dat ze juist zijn, ook al zijn ze dat in werkelijkheid niet.

   Als bijvoorbeeld in de gegevens staat dat Parijs de hoofdstad is van Duitsland, dan moet men dit als waar beschouwen, teneinde een correcte redenering te kunnen maken.

   Een <u>**conclusie**</u> is een propositie die we verkregen hebben door ze af te leiden uit de premissen via een logische redenering.
   Conclusies kunnen waar zijn of vals. Een conclusie die via een correcte redenering gemaakt wordt, is altijd juist, zelfs indien ze dat in werkelijkheid niet is.

   Als bv. in de gegevens staat dat Parijs de hoofdstad is van Duitsland en men besluit op een bepaald moment in de redenering dat Parijzenaren Duitstalig zijn, is dit een volkomen correcte redenering. De conclusie van deze redenering is in dit geval juist, hoewel ze dat in werkelijkheid niet is.

3. Een veel gebruikte redeneringsvorm is het syllogisme, afkomstig van Aristoteles.