13K

Professor Ann Dooms

Wiskunde in je smartphone

Over Instagram, geheime codes,
AI, en nog veel meer

met illustraties van
Katinka VanderSande

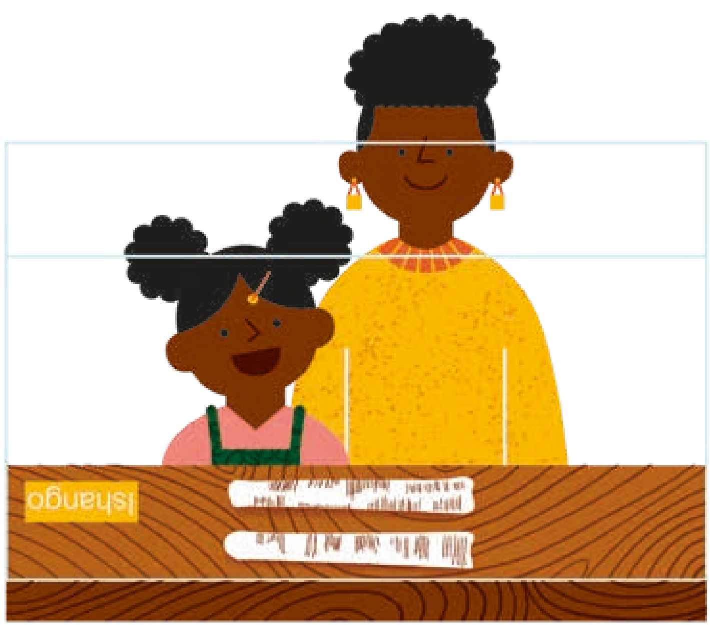
Lannoo

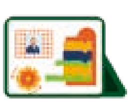
WISKUNDE IN MACHINES

1 Hoe ontstond wiskunde?

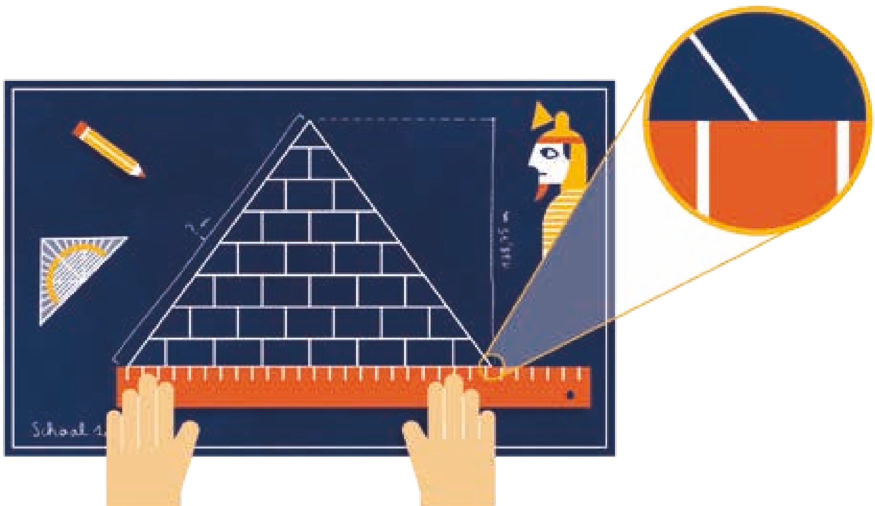
TELLEN Misschien heb je je al eens afgevraagd: wie vond wiskunde uit? De geschiedenis van de wiskunde gaat terug tot de prehistorie, zo'n 50.000 jaar geleden, toen er in stokken werd gekerfd om aantallen bij te houden. Het Ishango-beentje uit Congo van 22.000 jaar geleden is het oudste gevonden rekenhulpmiddel: hier komen de inkervingen in groepjes voor, waarmee ze waarschijnlijk aan de slag gingen om berekeningen te maken.

De Babyloniërs (3000–1600 v.Chr.) waren de eersten die nieuwe wiskunde ontwikkelden. Zij probeerden praktische problemen op te lossen van boeren, verkopers of kapiteins en schreven hun vondsten, zoals de tafels van vermenigvuldiging en meetkundige berekeningen, op kleitabletten in spijkerschrift. Ze werkten niet met veelvouden van 10, zoals wij, maar met veelvouden van 60 door hun bijzondere manier van tellen op de vingers. Dankzij hen werken wij nog steeds met 60 seconden in een minuut, 60 minuten in een uur, 24 uren in een dag en 360 graden in een cirkel.





GETALLEN Toen kwamen de Egyptenaren (2700–500 v.Chr.); zij schreven wiskundige verhaalproblemen op papyrus. Vaak gingen die over – niet verrassend – het berekenen van volumes van piramides, maar we vinden ook bijzondere getallen terug. Wij tellen dingen met 0, 1, 2, 3, enzovoort en noemen dat de *natuurlijke getallen*, maar als we de lengte van iets meten, weten we dat dit niet per se een natuurlijk getal oplevert. Wanneer we een liniaal gebruiken, kunnen we de lengte meten tot op de millimeter nauwkeurig, maar tussen de streepjes van de millimeters zitten nog oneindig veel mogelijke getallen. Zo vinden we tussen het streepje van de 0 en de eerste millimeter ook een halve millimeter terug, een vierde millimeter, een achtste millimeter…



Dit brengt ons bij de breuken van natuurlijke getallen, zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{20}{11}$,… die samen met hun negatieven, zoals $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{-13}{8}$, $\frac{-20}{11}$, de *rationale getallen* vormen. Deze getallen kunnen we steeds schrijven als een kommagetal waarbij het rijtje getallen na de komma stopt of telkens herhaald wordt. Zo noteren we $\frac{1}{2}$=0,5; of $\frac{-1}{3}$=–0,333…; of $\frac{13}{8}$=1,625 en $\frac{-20}{11}$=–1,8181…

Er bestaan echter ook lengtes die we niet zo kunnen schrijven. We komen ze zelfs tegen in eenvoudige meetkundige problemen. Stel dat de geit van een kinderboerderij zeker 2 m^2 gras per dag moet kunnen eten, maar dat het een weglopertje is. Ze willen hem dus met een touw aan een stok vastmaken. Hoe lang moet het touw dan zijn zodat de geit genoeg gras kan grazen? Om dat te weten moeten we de oppervlakte van een cirkel berekenen en daarbij duikt het mysterieuze getal pi op, met symbool π (zie hoofdstuk 5). Dit getal heeft de mens door de eeuwen heen kopzorgen bezorgd, omdat men maar geen herhalend patroon vond in het rijtje getallen na de komma. Zulke getallen laten zich niet exact opschrijven en noemen we *irrationale getallen*. We kunnen ze enkel schatten of *benaderen*.

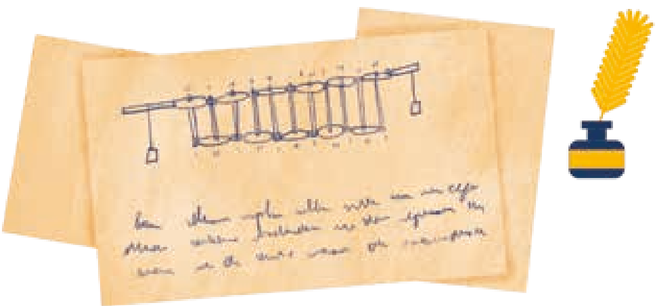
NIEUWE WISKUNDE De volgende grote stap binnen de wiskunde werd genomen door de Grieken (550 v.Chr.–300 n.Chr.). Ook zij werkten aan meetkundige problemen en ze waren de eersten die kwamen met een *bewijs*. Dit is een logische redenering die aantoont dat een bewering *waar* is. Zo gaven ze bijvoorbeeld een redenering die aantoont dat de som van alle hoeken in een platte driehoek steeds gelijk is aan 180 graden.

Hierna kwam de ontwikkeling van de wiskunde goed op dreef. De Arabieren (800–1500) droegen bij aan de oorsprong van de *algebra* – denk aan raadsels met getallen. Vanaf de zeventiende eeuw was er in Europa veel vooruitgang binnen de *analyse*, de wiskunde die de wereld om ons heen helpt te beschrijven.

Wanneer we verwonderd over iets zijn, helpt de wiskunde ons vaak om er *patronen* in te ontdekken, waardoor we het beter begrijpen. De Brugse wiskundige Simon Stevin zei ooit: *'Wonder en is gheen wonder'*, ofwel: voor alles is een uitleg en wiskunde zal je helpen. Hij vond trouwens het woord 'wiskunde' uit, 'de kunst van het gewisse of het zekere'.

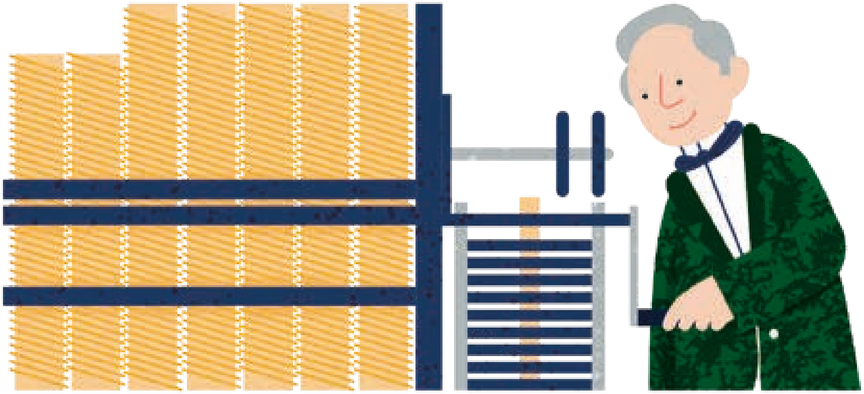
2 De eerste machine die zelf kon rekenen

REKENMACHINE Rond 1500 was er al heel veel wiskunde die hielp om praktische problemen op te lossen, zoals aan de hand van de stand van de sterren in de juiste richting varen op zee. De berekeningen die daarbij kwamen kijken, waren echter zeer lang. Dat kostte niet alleen tijd, maar je kon ook veel rekenfouten maken. Daarom kwam Leonardo da Vinci rond 1502 op het idee om een rekenmachine te maken waarmee je berekeningen kon uitvoeren. Hij schetste hoe die machine zou werken met tandwielen, maar ze werd nooit gebouwd.



Ruim honderd jaar later kwamen de eerste echte rekenmachines die mechanisch konden optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

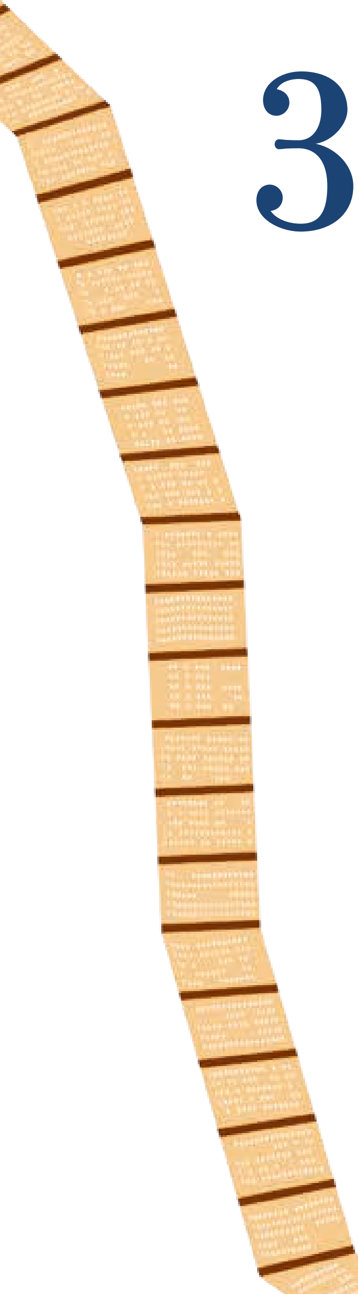
Je gaf de getallen in met een wiel en draaide aan een hendel, waarna allerlei tandwielen in beweging schoten om de berekening uit te voeren. Je moest dit echter heel voorzichtig doen, want anders werden er fouten



gemaakt. Het bedienen van zo'n machine was dus een echte job met als titel rekenaar, in het Engels *computer*.

HELP, EEN FOUT! Om niet telkens hetzelfde werk opnieuw te moeten doen werden er dikke boeken gepubliceerd met de resultaten van lange berekeningen die hielpen om bijvoorbeeld irrationale getallen tot een heel aantal cijfers na de komma te berekenen. Deze getallen konden dan bijvoorbeeld in de scheepvaart worden gebruikt, maar… er stonden af en toe foutjes in. Dit kon komen doordat de rekenmachine fout werd bediend of simpelweg door een schrijffout. Rond 1830 begon de Britse sterrenkundige Charles Babbage (1791–1871) zich hieraan te storen, want kleine fouten kunnen leiden tot grote problemen. Zeker als je op een schip plots de verkeerde richting uit wordt gestuurd! Dit bracht hem op het idee om een automatische rekenmachine te bouwen.

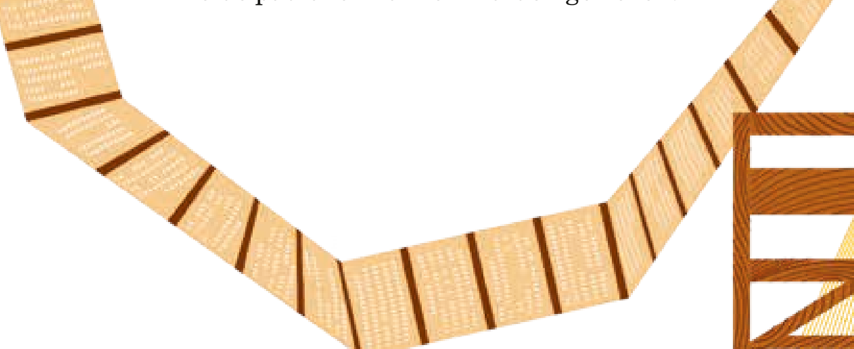
Dit was midden in de industriële revolutie, toen voor het eerst stoom werd gebruikt om machines te laten draaien en treinen te laten rijden. Daarmee maakte Babbage de eerste automatische rekenmachine, die hij de *Difference Engine* ('verschilmachine') noemde. Na het invoeren van de getallen kon de machine zélf de gevraagde bewerkingen uitvoeren. De eerste echte rekenhulp!

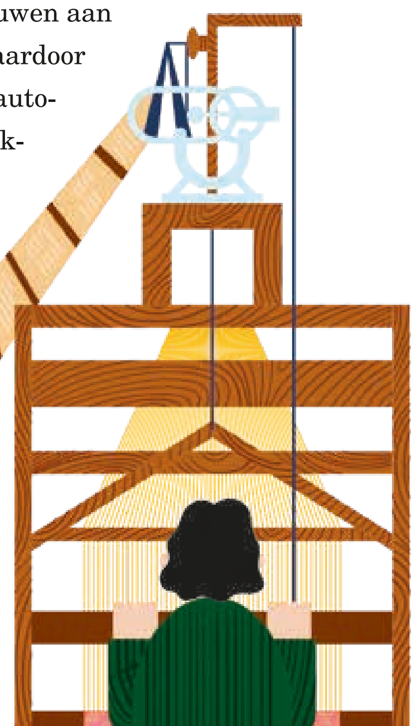


3 Het eerste algoritme

STOF TOT NADENKEN Babbage demonstreerde zijn machine op feestjes van rijke mensen, zo kon hij geld inzamelen om deze verder te verbeteren. Op een van die feestjes in 1832 ontmoette hij Ada Byron, de dochter van barones Anna Milbanke en de bekende Engelse dichter lord George Byron. Haar vader had nogal een wild leven en daarom wilde haar moeder niet dat ze interesse had in taal en gedichten. Ze regelde privéleerkrachten die Ada de nieuwste wiskunde leerden, want in die tijd mochten meisjes niet naar school.

Ada vond de machine prachtig en begreep meteen hoe deze werkte. Daarom besprak Babbage met haar zijn idee voor een nieuwe machine, de *Analytical Engine* (‘analyserende motor’). Die zou berekeningen kunnen maken door ‘zijn eigen staart te eten’. Daarmee bedoelde hij dat het resultaat van tussenbewerkingen kon worden opgeslagen en dat er onderweg kon worden beslist, afhankelijk van dat resultaat, hoe de berekening verder moest gaan. De machine zou dit kunnen door gebruik te maken van *ponskaarten*, een technologie die rond 1800 werd uitgevonden door de Franse stoffenmaker Joseph Jacquard. Hij stuurde zijn weefgetouwen aan door kaarten met gaatjes te gebruiken, waardoor het mechanisch doorschieten van draden automatisch werd geregeld. Zo konden ingewikkelde patronen vanzelf worden geweven.





JE EIGEN STAART ETEN Ada, ondertussen getrouwd met graaf Lovelace, begreep hoe dat zou werken en wilde de machine een ingewikkelde berekening laten maken die te moeilijk was om met de hand uit te voeren. Als de machine erin zou slagen, kon Ada de kracht van het nieuwe toestel tonen. Ze schreef een stappenplan, een beetje zoals een recept uit een kookboek, dat de machine moest volgen om de berekening uit te voeren. Zo'n eindige lijst van opdrachten om een probleem op te lossen werd in de negentiende eeuw door de Perzische wiskundige Muhammad Al-Khwārizmī, de uitvinder van de algebra, een *algoritme* genoemd.

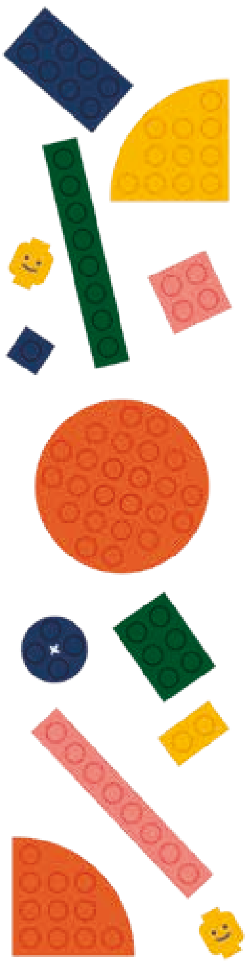
Als vrouw kon je niet zomaar je resultaten publiceren. Daarom maakte ze een Engelse vertaling van een artikel over de *Analytical Engine* van een rijke ingenieur en schreef er een flink aantal extra hoofdstukken bij. Een daarvan was dus het allereerste algoritme voor een machine!

4 De eerste computer

WISKUNDIGE LEGO Nadat Babbages schetsen vijftig jaar stof hadden vergaard, had de Duitse wiskundige David Hilbert in 1900 een groots plan. Hij wilde aantonen dat alle wiskunde eigenlijk kan worden gebouwd van basisblokken, *axioma's* genaamd, waarbij je een aantal regels volgt. Denk maar aan Lego: hoewel er niet veel soorten blokken bestaan, kun je er toch bijna alles mee namaken, waarbij je de regel volgt dat de blokken vast op elkaar moeten zitten.

Zo kun je uit de basisblokken van de wiskunde de natuurlijke getallen maken: 0, 1, 2, 3, …, 100, …, 2022, …

Daarnaast wilde hij dat elke bewering die je in de wiskunde doet, ofwel *waar* ofwel *niet waar* is, maar niet beide tegelijkertijd. Klinkt logisch. Toen wilde hij dat iets waar is enkel en alleen als er een bewijs voor bestaat. Een logische redenering dus, gebouwd met basisblokken.



EEN GELUK BIJ EEN ONGELUK In 1930 kwam er echter een grote verrassing. De Oostenrijks-Amerikaanse wiskundige Kurt Gödel bewees dat er wiskundige beweringen bestaan waarvan men niet kan bewijzen of ze waar of niet waar zijn én dat andere basisblokken kiezen het probleem niet oplost. Dit staat bekend als de *onvolledigheidsstelling van Gödel*.

Hilbert dacht dan aan een idee van de Duitse wiskundige Gottfried Leibniz, die er in 1673 van droomde een rekenmachine te maken die kon berekenen of een wiskundige bewering waar is. De machine zou dus op '10 is deelbaar door 2' waar moeten antwoorden en op de bewering '10 is deelbaar door 3' niet waar. Hilbert raakte hierdoor geïnspireerd en vroeg of in een eindig aantal stappen kan worden beslist of iets bewijsbaar is uit de axioma's volgens de regels. Een algoritme dus, waarmee je kunt beslissen of iets te bouwen is. Lijkt een aannemelijke vraag. Toch bewees de Britse wiskundige Alan Turing in 1936 dat zo'n algoritme niet kan bestaan. In Lego-termen:

wanneer we er maar niet in slagen om iets uit onze omgeving volgens de regels na te bouwen met de basisblokken, kunnen we via een stappenplan niet te weten komen of we wel goed genoeg hebben geprobeerd of dat het simpelweg nooit zal lukken.

Dat was pech voor de wiskunde, maar tegelijkertijd zorgde Turing voor een enorme vooruitgang. Om zijn resultaat te bewijzen maakte hij een schets van een machine die álles kan berekenen wat met algoritme kan worden berekend. Het enige wat die nodig heeft, is altijd genoeg ‘geheugen’ – denk maar aan een lange strook papier – om een 0 of 1 uit te lezen of te overschrijven. Afhankelijk van wat ze op een bepaalde plaats uitleest, weet de machine wat de volgende stap moet zijn. Dit idee was nog ingenieuzer dan dat van Babbage. De computer werd nu echt geboren!

DIGI-TAAL Toen begon de race om zo’n *universele* rekenmachine die al die algoritmes kan uitvoeren, een *Turingmachine*, in het echt te maken, maar in de werkelijkheid moet je het natuurlijk doen met een eindig geheugen (en dus zal niet alles exact uitvoerbaar zijn). Dit noemen we een *digitale computer.* Rond 1940 kwam de eerste digitale computer, de Duitse Z3, aangedreven door elektriciteit en tandwielen, terwijl de Britse Colossus de eerste digitale volledig elektronische computer werd. De Amerikanen volgden in 1943 met de ENIAC *(Electronic Numerical Integrator and Calculator)*, die gigantisch groot, maar ook gigantisch snel was. Natuurlijk veel trager dan de computers nu, maar veel sneller dan wij met de hand kunnen rekenen. Zijn eerste taak zou het berekenen van de trajecten van granaten en raketten geweest zijn om zo levens te redden tijdens de Tweede Wereldoorlog, maar daarvoor was hij iets te laat klaar.

De digitale computer werd een succes, niet alleen door mannelijke fysici en ingenieurs, maar ook door vrouwelijke wiskundigen. Zij ontwierpen de algoritmes voor de berekeningen, net als Ada, en voerden ze in de machines in, wat men *programmeren* noemt. De mannen maakten de hardware, de vrouwen de software!

5 Wat kun je berekenen met een computer?

BEREKENEN De computer is al lang niet meer één soort toestel. Hij was eerst een reusachtige machine, werd toen een toestel om op je bureau te zetten en veranderde vervolgens in de laptop. Nu zit er een computer in je broekzak – je smartphone – en zelfs om je pols. We kunnen onze laptops, tablets, smart-tv's, smartphones en smartwatches niet meer wegdenken, maar weet jij hoe ze vanbinnen werken? We pluizen het uit.

Dankzij Turing weten we dat een digitale computer alles kan berekenen wat met een algoritme kan worden berekend. Dat is natuurlijk makkelijker gezegd dan gedaan, want wat kunnen we berekenen met een algoritme? Wanneer we een taart bakken, volgen we een recept, een algoritme dus, maar een taart is niet het resultaat van enkel een berekening, maar van het bij elkaar brengen van de juiste hoeveelheden ingrediënten.

BITS EN BYTES Een computer kan gebruikt worden om te rekenen met alles wat voorstelbaar is in nullen en enen. Dat noemen we een *binaire voorstelling*. De huidige computers gebruiken hiervoor *transistoren*, kleine schakelaartjes die aan of uit gaan. Aan stelt een 1 voor, uit een 0. Dit noemen we een *bit*. Alle rationale getallen (dus de natuurlijke getallen, hun negatieven en breuken) kunnen we binair voorstellen door ze te schrijven als een som van machten van 2, dus een som van producten van 2 met zichzelf. Enkele voorbeelden:

$1=2^0$, $2=2^1$, $3=2+1=2^1+2^0$, $4=2\times2=2^2$, $5=4+1=2^2+2^0$, …, $100=2^6+2^5+2^2$, $228=2^7+2^6+2^5+2^2$

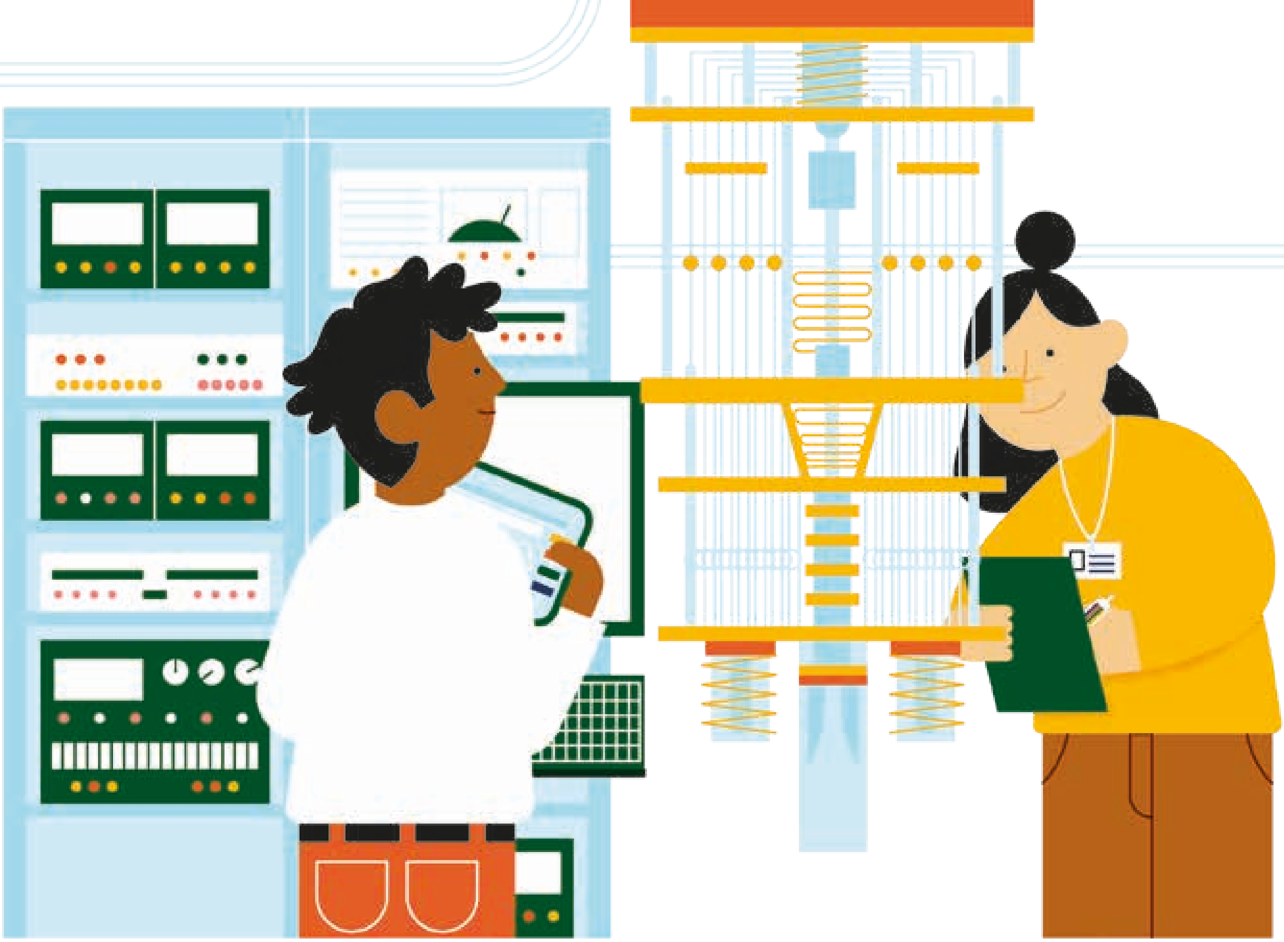
De binaire voorstelling is dan een verkorte notatie waarbij we van rechts naar links een 0 of 1 schrijven naargelang welke stijgende machten van 2 voorkomen in de som. We krijgen dan:

0=0, 1=1, 2=10, 3=11, 4=100, 5=101, …, 100=1100100, 228=11100100

Een groepje van 8 bits noemen we een *byte*, waarmee we de getallen 0 tot en met 255 kunnen voorstellen. Grotere getallen en hun breuken stellen we voor door groepjes van bytes. Zo kan de computer rekenen met rationale getallen. We zagen dat de irrationale getallen niet exact op te schrijven zijn en dus kunnen we ze ook niet binair voorstellen op een computer. De computer kan er echter wel betere schattingen van berekenen dan wij met de hand. Zo kan hij dat ook voor pi. Dit lukt niet enkel omdat hij heel snel kan rekenen, maar vooral door slimme algoritmes. We vertellen hem met wiskunde wat hij moet doen.

DIGITAAL Hoewel een computer uitblinkt in rekenen, gebruiken we hem voor veel meer dan dat. Zo komen we terug bij Ada, die in haar eerste extra hoofdstuk schreef dat een computer kan worden ingezet voor alles wat kan 'worden voorgesteld met getallen'. De omzetting naar getallen noemen we nu *digitaliseren*. Ze gaf zelf muziek als voorbeeld en ze kreeg gelijk. Een microfoon zet geluidsgolven om in een elektrisch signaal, dat een computeralgoritme kan omtoveren tot een mp3-bestand. Zo kun jij telkens opnieuw je favoriete liedje digitaal beluisteren. Ook de foto's die je neemt met je smartphone zijn digitaal. Het licht dat we zien, valt via de lens van je camera binnen op de sensor met lichtgevoelige deeltjes die elk een hoeveelheid rood, groen en blauw licht meten. Per kleur zijn er 256 mogelijkheden, die je dus kunt beschrijven met een byte. Je *digitale foto* is dan in feite een groot raster opgebouwd uit heel veel getallen die op het scherm van je computer, smartphone of tv weer worden omgezet in gekleurde blokjes of pixels. Om je foto vervolgens te bewaren voert je smartphone of computer alweer een algoritme uit (zie volgend hoofdstuk).

Dankzij internet kunnen wij met onze computers ook allerlei informatie opzoeken via Google, muziek beluisteren en videobellen. Dit kan doordat onze computers constant rekenen en slimme wiskundige algoritmes uitvoeren. De uitvinding van de computer heeft ons leven sterk veranderd. Daarom spreekt men weleens van een echte *digitale revolutie*.



COMPUTER 2.0 Er is ondertussen een nieuw soort computer in de maak, de *kwantumcomputer*. Die werkt ook met nullen en enen, maar rekent er op een heel nieuwe manier mee. Hij maakt hiervoor gebruik van de kwantummechanica, de fysica op het niveau van atomen en kleinere deeltjes, de bouwstenen van alles wat we om ons heen zien en voelen. Wanneer we een muntstuk gebruiken om een bit voor te stellen, waarbij kop nul is en munt één, dan rekent de kwantumcomputer met muntstukken die we op hun kant laten draaien terwijl ze op een eigenaardige manier met elkaar in contact staan. Dit noemen we een *qubit*. Hiermee kan de kwantumcomputer supersnel problemen uitrekenen waar we met een gewone computer duizenden jaren over zouden doen. Ze zullen onze huidige computers niet vervangen, maar samen laten ze de wereld van morgen er alweer anders uitzien.

Test je kennis!

VRAAG 1: *Wie vond het woord wiskunde uit?*

A) Leonardo da Vinci B) Simon Stevin C) Al-Khwārizmī

VRAAG 2: *Wat is een algoritme?*

A) Een eindige lijst van opdrachten om een probleem op te lossen

B) Een moeilijke berekening C) Een term uit de muziekwereld

VRAAG 3: *Wie schreef het eerste computerprogramma?*

A) Ada Lovelace B) Charles Babbage C) Alan Turing

VRAAG 4: *Wat kun je niet doorsturen tijdens het videobellen?*

A) Geluid B) Geur C) Beeld

Antwoorden: 1) B, 2) A, 3) A, 4) B