

WAT EEN HOND  
ons  
over WISKUNDE  
kan leven

En 27 andere wonderlijke verhalen over  
limieten, differentiaal en integralen

BEN ORLIN

Lannoo

[www.lannoo.com](http://www.lannoo.com)

Registreer u op onze website en we sturen u regelmatig een nieuwsbrief met informatie over nieuwe boeken en met interessante, exclusieve aanbiedingen.

Vertaling: Marianne Kalsbeek

Vormgeving omslag: Headcase Design en Studio Lannoo

Vormgeving binnenwerk: Headcase Design

Boekverzorging: Asterisk\*, Amsterdam

First published in the United States as: *CHANGE IS THE ONLY CONSTANT:*

*The Wisdom Of Calculus in a Mindcap World*, by Ben Orlin, copyright © 2019

Published by arrangement with Black Dog & Leventhal, an imprint of Perseus Books, LLC, a subsidiary of Hachette Book Group, Inc., New York, New York, USA.

All rights reserved

© Nederlandse editie: Uitgeverij Lannoo, Tielt, 2021

D/2021/45/270 – NUR 918 – ISBN 978 94 014 7467 2

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand en/of openbaar gemaakt in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch of op enige andere manier zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

# INHOUD

INLEIDING, blz. 13

---

## MOMENTEN

---



**1. DE VLUCHTIGHEID  
VAN DE TIJD,**  
waarin calculus een wens vervult  
blz. 23



**2. DE VOORTDUREND  
VALLENDE MAAN,**  
waarin calculus de kosmos uitlegt  
blz. 33



**3. DE KORTSTONDIGE  
GENEUGTEN VAN  
TOAST MET BOTER,**  
waarin calculus een hart veroverft  
blz. 43



**4. DE UNIVERSELE  
TAAL,**  
waarin calculus winst maakt  
blz. 53



**5. TOEN DE MISSISSIPPI  
MILJOENEN KILOMETERS  
LANG WAS,**  
waarin calculus een grap uithaalt  
blz. 63



**6. SHERLOCK HOLMES EN  
DE MISLEIDENDE FIETS,**  
waarin calculus een moordzaak oplost  
blz. 73



**7. DE ONGEAUTORI-  
SEERDE BIOGRAFIE  
VAN EEN RAGE,**

waarin calculus  
een trend in kaart brengt  
blz. 81



**8. WAT DE WIND  
ACHTERLAAT,**

waarin calculus  
een raadsel opwerpt  
blz. 91



**9. DOE DE  
STOFDANS,**

waarin calculus  
een botanicus  
verbaasd doet staan  
blz. 99



**10. HET GROENHARIGE  
MEISJE EN DE  
SUPERDIMENSIONALE  
VORTEX,**

waarin calculus  
een echtgenoot overschaduw  
blz. 109



**11. DE PRINSES  
AAN DE RAND VAN  
DE STAD,**

waarin calculus  
bouwgrond aan zee opeist  
blz. 121



**12. DE PAPERCLIP-  
WOESTENIJ,**

waarin calculus  
een apocalyps ontketent  
blz. 129



**13. DE CURVE  
DIE HET LAATST  
LACHT,**

waarin calculus  
de belastingwetten verandert  
blz. 139



**14. DAT IS  
PROFESSOR HOND  
VOOR JOU,**

waarin een hond een ster  
wordt door calculus  
blz. 151



**15. CALCULEMUS!,**

waarin calculus  
alle problemen voor altijd  
oplost  
blz. 161

---

## EEUWIGHEDEN

---



### 16. IN LITERAIRE KRINGEN,

waarin calculus  
een komkommer in plakjes snijdt

blz. 171



### 17. OORLOG EN VREDE EN INTEGRALEN,

waarin calculus  
een revolutie veroorzaakt

blz. 179



### 18. DE SKYLINE VAN RIEMANNSTAD,

waarin calculus aan  
stadsplanning doet

blz. 189



### 19. EEN GROTE SYNTHESE,

waarin calculus  
een dinertje organiseert

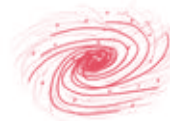
blz. 199



### 20. WAT ONDER HET INTEGRAALTEKEN GEBEURT, BLIJFT ONDER HET INTEGRAALTEKEN,

waarin calculus  
zijn gereedschapskist uitbreidt

blz. 209



### 21. HET BESTAAN UITWISSEN MET EEN PENNENSTREEK,

waarin calculus  
68% van het bestaande  
universum uitwist

blz. 217



**22. 1994: GEBOORTE  
VAN CALCULUS,**

waarin calculus  
je bloedsuiker meet

blz. 227



**23. ALS HET PIJN  
MOET DOEN,**

waarin calculus  
je ziel de maat neemt

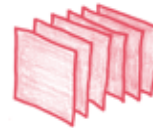
blz. 235



**24. IN GEVECHT  
MET DE GODEN,**

waarin calculus  
een Romeinse overwinning afwendt

blz. 243



**25. UIT ONGEZIENE  
SFEREN,**

waarin calculus  
de vierde dimensie bezoekt

blz. 253



**26. EEN TORENHOGE  
BAKLAVA VAN ABSTRACTIES,**

waarin calculus slechts een voetnoot is

blz. 263



**27. GABRIËL, LAAT JE  
HOORN SCHALLEN,**

waarin calculus  
een ketterij ter wereld brengt

blz. 273



**28. SCÈNES UIT EEN  
ONMOGELIJKHEID,**

waarin calculus  
ons dwarszit en een sensatie is

blz. 283

**AANTEKENINGEN UIT  
HET KLASLOKAAL,**

blz. 293

**BIBLIOGRAFIE,**

blz. 299

**DANKWOORD,**

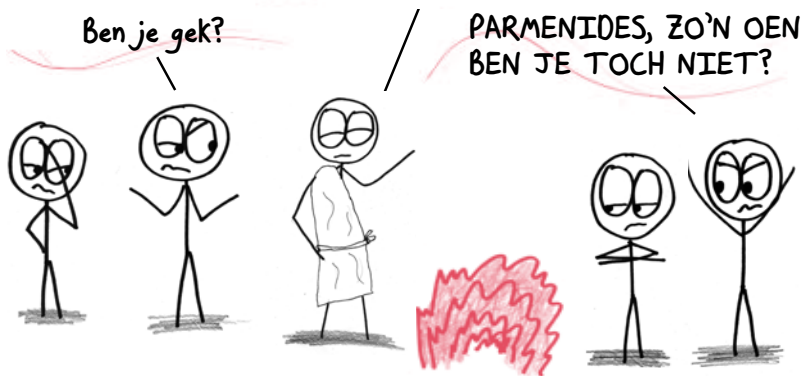
blz. 319

# INLEIDING

'Het zijnde', zei de filosoof Parmenides, nog geen miljoen dagen geleden, 'is ongeworden en onvergankelijk, enkelvoudig, volledig, onbeweeglijk, en het heeft geen einde.' Dat is een gedurfde filosofie. Parmenides stond geen onderverdelingen toe, geen onderscheid, geen toekomst, geen verleden. 'Het was nooit en het zal ook niet zijn,' legde hij uit, 'want het is nu, volledig, en onophoudelijk één.' Voor Parmenides was het universum als het verkeer in Los Angeles: eeuwig, monolithisch, onveranderlijk.

Ook een miljoen dagen later is dat nog steeds een heel dom idee.

## Er verandert nooit iets.



Kom op, Parmenides. Je kunt bijvoeglijk naamwoorden blijven toevoegen en ons in slaap proberen te sussen met poëzie, maar we zijn niet dom. Een miljoen dagen geleden waren er geen boeddhisten, christenen, of moslims, want Boeddha, Jezus en Mohammed moesten nog geboren worden. Een miljoen dagen geleden aten de Italianen nog geen tomatensaus, want 'Italië' bestond nog niet en de dichtstbijzijnde tomatenplant stond 9000 kilometer ver weg. Een miljoen dagen geleden waren er 50 of 100 miljoen mensen op aarde; evenveel mensen als er nu jaarlijks een Disney-pretpark bezoeken.

In feite, Parmenides, zijn er maar twee dingen die nu nog hetzelfde

zijn als een miljoen dagen geleden: (1) alles verandert, en (2) hoe fout jouw filosofie is, heel fout, grondig fout.

Dat is het laatste wat we van Parmenides vernemen in dit boek (hoewel zijn volgeling Zeno, een stuk slimmer dan Parmenides zelf, later nog even langskomt). Zijn alle blowende togadragers nu de deur uit? Opgeruimd staat netjes, zeg ik. We doen nu een stap vooruit in de tijd, of eigenlijk een sprong, voorbij Parmenides' wijzere tijdgenoot Heraclitus ('je kunt geen twee keer in dezelfde rivier stappen'), en belanden in de late 17de eeuw, een luttele 120.000 tot 130.000 dagen geleden. Toen schonken een wetenschapper genaamd Isaac Newton en een geleerde genaamd Gottfried Leibniz samen het leven aan de hoofdrolspeler van dit boek. Het was een volstrekt nieuwe vorm van wiskunde, een taal van verandering, een poging tot berekening van de vloeiende bewegingen van de wankelende tol die wij de aarde noemen.

Tegenwoordig noemen we die tak van de wiskunde 'calculus'.

Het belangrijkste instrument dat de calculus gebruikt, is de **afgeleide**. De afgeleide is de momentane hoeveelheid verandering, en hij vertelt ons hoe iets verandert op een specifiek moment in de tijd. Neem bijvoorbeeld de snelheid van de appel precies op het moment dat die op Newtons hersenpan terechtkomt. Een seconde daarvoor bewoog dat stuk fruit wat langzamer;

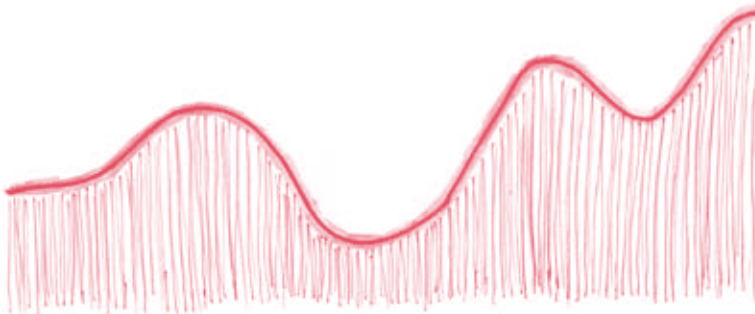




een moment daarna beweegt het in een hele andere richting, en met die appel neemt ook de geschiedenis van de natuurkunde een andere wending. Maar de afgeleide is niet geïnteresseerd in een seconde eerder of later. Hij zegt alleen iets over *dit moment*, een ondeelbaar klein splintertje tijd..

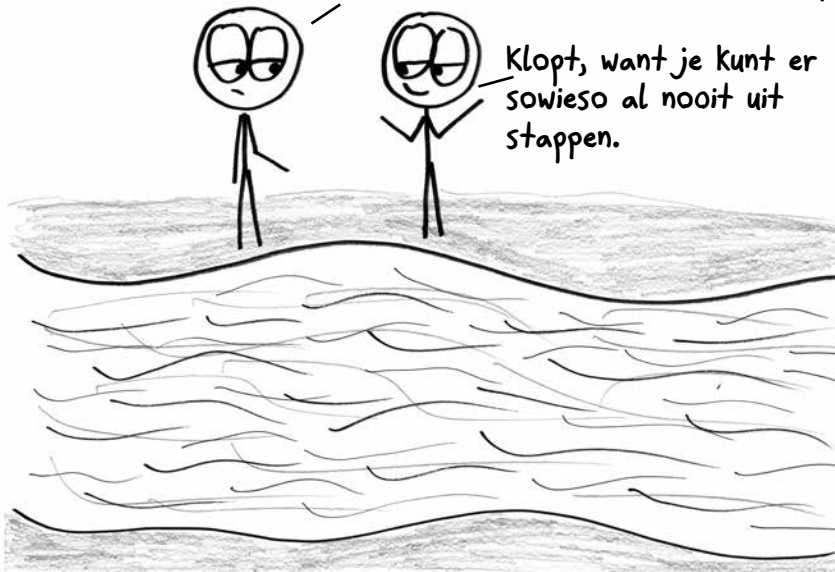
Het andere belangrijke instrument van de calculus is de **integraal**. Dit is de som van oneindig veel stukjes die allemaal ondeelbaar klein zijn. Stel je voor hoe een stapel cirkels, elk zo dun als een schaduw, samen een vast lichaam kan vormen: een bol. Of hoe een enorme groep mensen, waarvan elk individu even klein en verwaarloosbaar is als een atoom, samen een hele samenleving kan vormen. Of hoe een serie momenten, die allemaal nul seconden duren, samen een uur duurt, een eeuw, een eeuwigheid.

Iedere integraal vertegenwoordigt een totaliteit, iets gigantisch, dat op de een of andere manier gevangen kan worden door de panoramische lens van de wiskunde.



De afgeleide en de integraal hebben een goede reputatie verworven als gespecialiseerde technische hulpmiddelen. Maar volgens mij hebben ze meer te bieden. Jij en ik zijn net kleine bootjes die kapseizen op hoge golven, ronddraaien op draaikolken, en plotseling vooruitgeduwd worden in stroomversnellingen. Naar mijn mening zijn de afgeleide en de integraal filosofieën in zakformaat: uitschuifbare riemen waarmee we koers kunnen houden op de aanzwellende rivier die de wereld is.

Ze zeggen dat je niet twee keer in dezelfde rivier kunt stappen.



Vandaar dit boek vol pogingen om wijsheid te destilleren uit de wiskunde.

In de eerste helft van het boek, **Momenten**, verkennen we verhalen over de afgeleide. Ieder verhaal vist een moment uit de kabbelende rivier van de tijd. We zullen een millimeter van de baan van de maan bekijken, knabbelen aan een geroosterde boterham met boter, we zullen even ruiken aan de onregelmatige sprongen van een stofdeeltje en aan de snelle beslissingen van een hondje. Als de afgeleide een microscoop is, dan is elk van deze verhaaltjes een zorgvuldig gekozen prepareerglasje, een scène in miniatuur.

In de tweede helft van het boek, **Eeuwigheden**, sommeren we de machtige integraal om oneindig veel druppels te verenigen tot een rivier. We zullen een cirkel tegenkomen die bestaat uit minuscule taartpuntjes, een leger met ontelbaar veel soldaten, een skyline gevormd door een oneindige rij anonieme gebouwen, een kosmos beladen met biljoenen triljoenen sterren. Als de integraal een gigantisch IMAX-scherm is, dan is elk van deze verhalen een aangrijpend epos waarvoor je echt naar de bioscoop *moet*, want thuis op de tv komen ze niet tot hun recht.

Laat ik duidelijk zijn: uit het boek dat je nu in je handen hebt, kun je geen ‘calculus leren’. Het is geen welgeordend leerboek maar een eclectisch boek met overgeleverde verhalen en simpele tekeningen, een boek voor de gewone lezer, dat geschreven is in gewonemensentaal. Of de lezer goed bekend is met calculus of er juist helemaal niets van weet: ik hoop dat deze verhalen hoe dan ook wat plezier en inzicht bieden.

Dit boek is verre van compleet: de verhalen over Fermats buigende licht, over Newtons geheime anagram, en over Diracs onmogelijke functie, ze ontbreken allemaal, en veel andere verhalen ook. Maar in een altijd veranderende wereld kan geen enkel boek zijn onderwerp ooit uitputtend behandelen en is geen mythologie ooit echt af. De rivier stroomt verder.

BEN ORLIN  
DECEMBER 2018

ZAND



Welk monster  
doet jou dit aan?

ZEG TOCH  
IETS, ZAND!

**MOMENT 1**

*De tijd maakt weer een slachtoffer.*

# 1

## DE VLUCHTIGHEID VAN DE TIJD

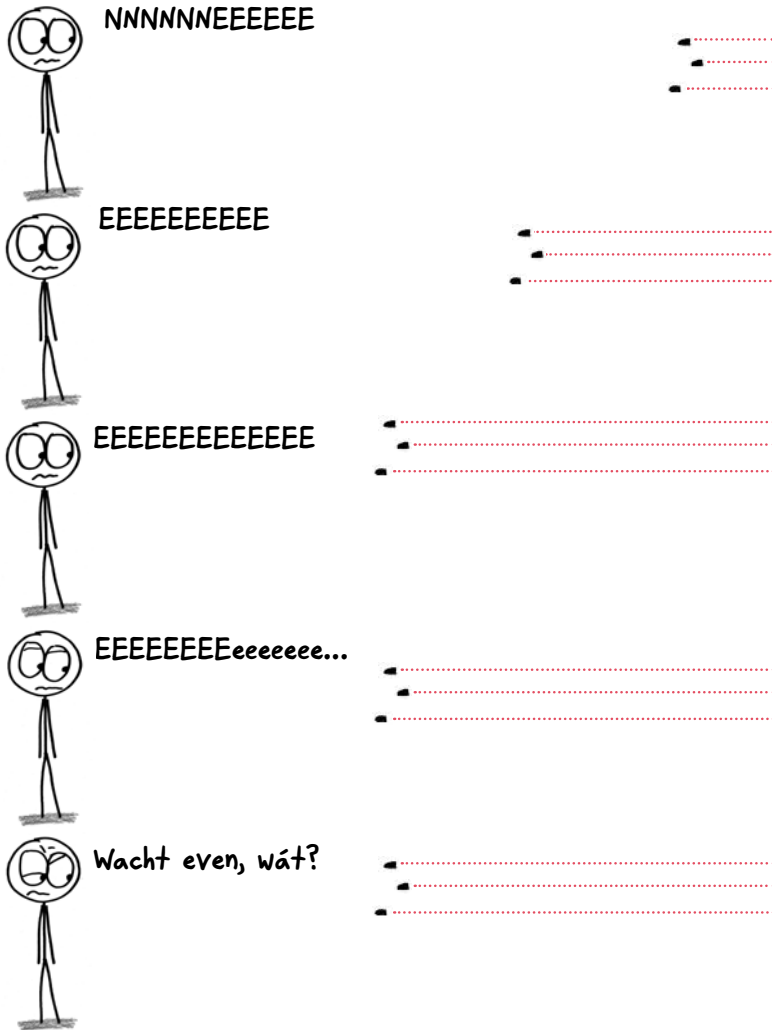
**J**aromir Hladik heeft verschillende boeken geschreven en over geen van die boeken is hij tevreden. Het ene boek vind hij ‘het resultaat van niets anders dan hard werken’. Het andere ‘wordt gekenmerkt door slordigheid, vermoeidheid, en speculatie’. Het derde boek was een poging een drogreden te weerleggen, maar deed dat door middel van argumenten die ‘niet minder onjuist’ waren dan de drogreden zelf. Zelf heb ik natuurlijk alleen boeken geschreven die zo volmaakt en briljant zijn als tandpastareclames, maar desondanks leef ik met hem mee, vooral met het vleugje hypocrisie dat Hladik de dag door helpt. ‘Zoals alle schrijvers’, vertelt Jorge Luis Borges ons, ‘beoordeelde hij andere schrijvers op wat ze hadden gepresteerd, maar verwachtte hij dat zij hem zouden beoordelen op zijn plannen en ideeën.’

En wat voor plannen heeft Hladik dan? Aha, het verheugt Hladik dat je dat vraagt! Een toneelstuk in versvorm getiteld *De Vijanden*, dat niet meer of minder dan zijn meesterwerk zal worden. Het stuk zal de kroon op zijn nalatenschap vormen, het zal zijn zwager de mond snoeren, en het zal zelfs ‘zijn leven eindelijk zin geven’... als hij maar die ene horde zou kunnen nemen: het stuk ook daadwerkelijk eh, je weet je wel... schrijven.

Ik moet nu mijn excuses aanbieden, want dit verhaal neemt hier een duistere wending. Hladik, een Jood in het Praag onder de nazi's, wordt door de Gestapo gearresteerd. Na een haastige rechtszaak krijgt hij de doodstraf. Op de vooravond van zijn executie bidt hij tot God:

*Als ik besta en niet een van Uw herhalingen of fouten ben, dan besta ik als de schrijver van De Vijanden. Om dat stuk te schrijven, het werk dat mijn bestaan zal rechtvaardigen, het werk dat U zal rechtvaardigen, heb ik nog een jaar nodig. Schenk mij dat jaar, God van de eeuwen der eeuwen, aan wie alle tijd toebehoort.*

De slapeloze nacht gaat voorbij, de dag van de executie breekt aan, en dan, op het moment dat de sergeant het vuurpeloton zijn laatste order toeblaft, op het moment dat Hladik zich schrap zet voor zijn dood, het moment waarop alles onherstelbaar verloren lijkt... precies op dat moment bevriest het universum.



God heeft hem een onzichtbaar wonder geschonken. Dit moment, waarop er een regendruppel over zijn wang rolt en de fatale kogels onderweg zijn, dit ene moment wordt uitvergroot, uitgesmeerd, uitgerekt. Voor dit

ene moment wordt de wereld uitgesteld, maar Hladiks denken niet. Nu kan hij aan zijn toneelstuk werken, in gedachten de verzen schrijven en verbeteren, tot het af is. Dit moment zal een jaar duren.

Nu, op het moment waarop hem iets te gebeuren staat waarom niemand hem zou benijden, wordt Hladik iets gegund waar iedereen jaloers op zou zijn.

‘Het doel van iedere kunstenaar’, schreef William Faulkner ooit, ‘is beweging, dat wil zeggen het leven, kunstmatig stil te zetten, en het vast te leggen.’ (Hladik zelf is natuurlijk een fictief figuur, in het leven geroepen door Jorge Luis Borges.) *Tempus fluit*, schreef Isaac Newton: de tijd stroomt. *Tempus fugit*, stond er op de zonnewijzers in de middeleeuwen: de tijd vliedt weg. Hoewel onze methoden verschillen, jagen wij kunstenaars en wetenschappers, en zelfs de welbespraakte onbenulligen die we ‘filosofen’ noemen, allemaal hetzelfde onmogelijke doel na. We willen de tijd vastpakken, het moment in onze handen houden, zoals Hladik dat deed.

Helaas, de tijd ontglipt ons. Neem nou de beroemde ‘paradox van de pijl’ van de ongeneeslijke Griekse trol Zeno van Elea.

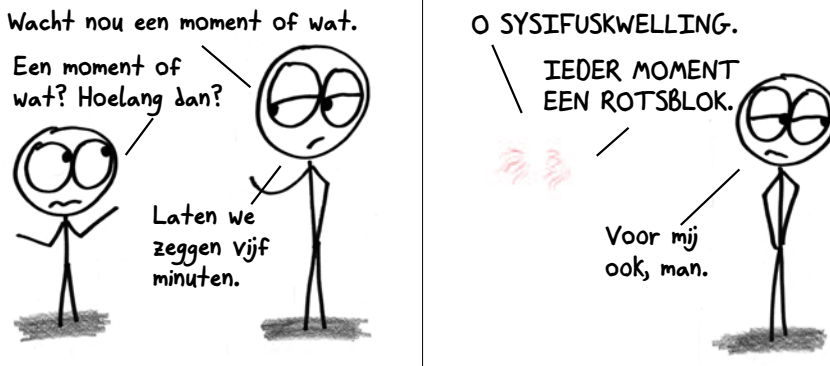
Het idee: Stel je een pijl voor die door de lucht vliegt. Zet dat beeld in je gedachten een moment stil, net als Hladiks vuurpeloton. Beweegt de pijl nog? Nee, natuurlijk niet, in een stilstaand beeld staat alles per definitie stil. Op ieder gegeven moment is de pijl bewegingloos. Maar als de tijd bestaat uit momenten, en als de pijl op geen enkel moment beweegt... hoe kan hij dan ooit bewegen?



En wanneer beweegt de pijl dan precies?

Ook in het oude China speelden de filosofen zulke gedachtespelletjes. ‘Het dimensieloze kan niet worden verzameld’, schreef een van die filosofen. ‘Het is duizend mijlen groot.’ In wiskundige zin is het moment *dimensieloos*. Het heeft geen lengte, geen duur. Het duurt nul seconden. Maar omdat twee keer nul weer nul is, duren ook twee momenten nul seconden. Hetzelfde geldt voor tien momenten, duizend momenten, een miljoen momenten. *Iedere* aftelbare hoeveelheid momenten bij elkaar opgeteld duurt in feite nul seconden.

Maar als je nooit tijd krijgt, ongeacht hoeveel momenten je aan elkaar rijgt, waar komen de maanden en de jaren en de voetbalwedstrijden dan vandaan? Hoe kunnen oneindig korte momenten samen een oneindige tijdlijn vormen?



Virginia Woolf merkte op dat tijd ‘zorgt dat dieren en groenten met een verbazende punctualiteit tot bloei komen en verwelken’. Maar de tijd ‘heeft niet zo’n eenvoudig effect op de geest van de mens. Bovendien heeft de geest van de mens een even eigenaardige invloed op de tijd.’

Door de hele geschiedenis heen jagen we al op het moment en verminken bij die jacht de tijd. Met zandlopers en kaarsklokken sneden we onze dagen in uren. Met pendules en mechanische uurwerken sneden we de uren in minuten (van het Latijnse *minutus*: geslonken, verkort, heel klein) en vervolgens in seconden (dat wil zeggen de tweede orde van klein: ‘seconde’ komt van het Latijnse *secundus* ofwel twee, een miniem deel van een minuut). Daarna ontleedden we de tijd verder in milliseconden (de helft van de vleugelslag van een vlieg), microseconden (een knipper van een flitslamp) en nanoseconden (in drie daarvan kan het licht ongeveer een meter afleggen), om nog maar niet te spreken van pico-, femto-, atto- en





Waar, o waar is ‘het moment’? Ligt het ergens voorbij planck? Als we intervallen niet uit momenten kunnen opbouwen en ze ook niet kunnen opbreken in momenten, wat *zijn* die momenten dan voor onzichtbare, ondeelbare dingen? Als ik dit boek schrijf in de tik-tak-wereld van de gewone tijd, in wat voor bruisende niet-wereld schrijft Hladik dan zijn boek?

In de 11de eeuw probeerde de wiskunde voor het eerst een antwoord te formuleren op deze vragen. Terwijl Europese wiskundigen zich van wanhoop de haren uit het hoofd rukten over het berekenen van de datum van Pasen, waren de Indiase astronomen al bezig met het voorspellen van zons- en maansverduisteringen. Dat vergde uiterste precisie. De Indiase astronomen begonnen te werken met tijdseenheden die zo kort waren dat er ongeveer duizend jaar voorbij zou gaan voordat er een klok was die ze kon meten. Een *truti* was minder dan  $1/30.000$  van een seconde.

Deze bijna oneindig kleine splintertjes tijd baanden het pad voor een concept dat *tatkalika-gati* heette: momentane beweging. Hoe snel, en in welke richting, beweegt de maan *op precies dit moment*?

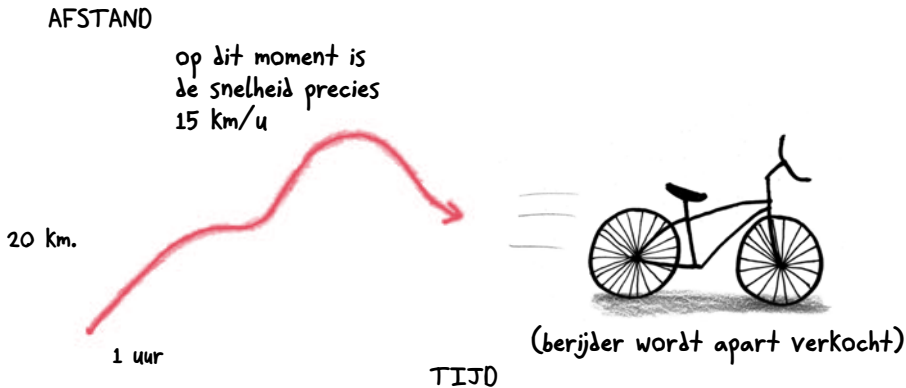
En op *dit* moment?

En *nu* dan?

En *nu*?

Tegenwoordig heeft de *tatkalika-gati* een veel gewonere naam: de ‘afgeleide’.

Neem een fiets waarop iemand rondfietst. De afgeleide meet hoe snel de positie van de fiets verandert; de afgeleide is dus de snelheid van de fiets op ieder gegeven moment, de momentane snelheid. In de grafiek hieronder is de afgeleide de helling van de curve. Een steilere helling betekent dat de fiets sneller gaat, een grotere afgeleide dus.

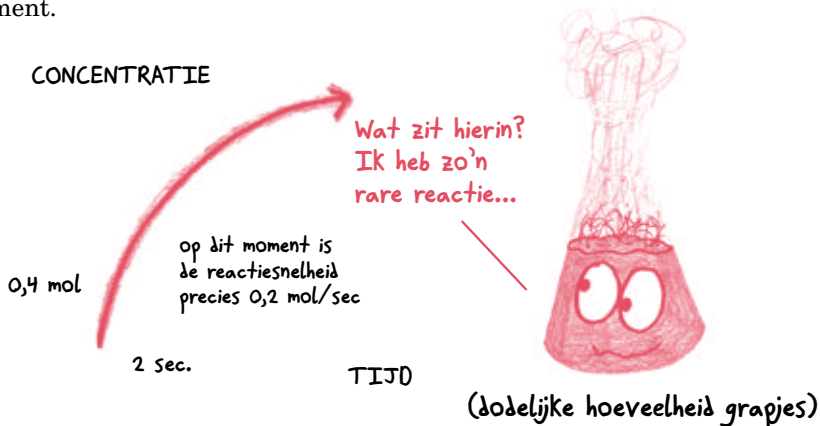


Natuurlijk, de fiets is op ieder gegeven moment net Zeno's pijl: bewegingloos. We kunnen afgeleiden dus niet berekenen door het beeld stil te zetten. In plaats daarvan werken we met inzoomen. Eerst bepaal je de snelheid van de fiets over een interval van 10 seconden; dan neem je een interval van 1 seconde; dan een interval van 0,1 seconde, van 0,01 seconde, van 0,001 seconde...

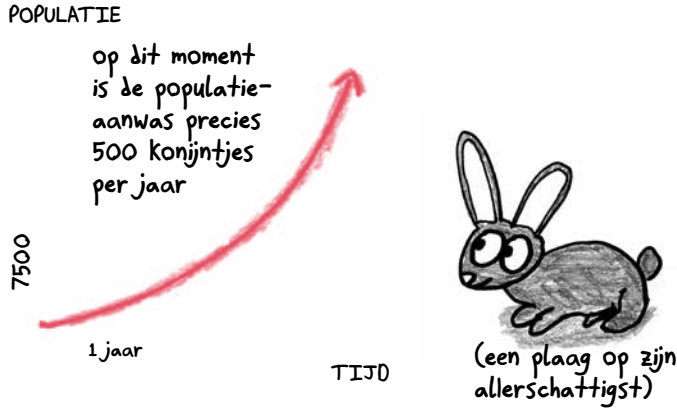
We besluipen op deze slimme manier het moment, we komen steeds dichterbij, tot er een patroon verschijnt:

START	EINDE	SNELHEID
12:00:00	12:00:10	39 km/u
12:00:00	12:00:01	39,91 km/u
12:00:00	12:00:00.1	39,98 km/u
12:00:00	12:00:00.01	39,997 km/u
<i>Om precies 12 uur...</i>		<i>40 km/u</i>

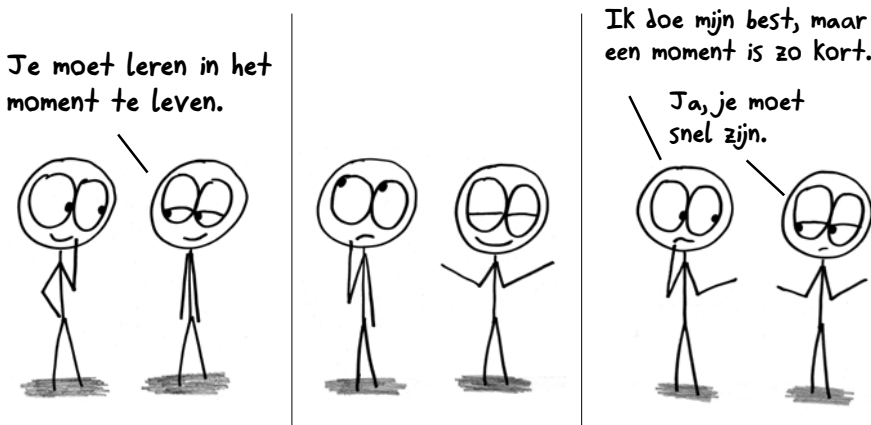
Een ander voorbeeld: een reactie waarbij twee chemische stoffen hun chemische onderdeeljes laten trouwen en er nieuwe chemische babystoffjes ontstaan. De afgeleide meet hoe snel de concentratie van het chemische nageslacht groeit; de afgeleide is dus de reactiesnelheid op een bepaald moment.



Of neem een overbevolkt eiland: veel te veel konijnen. De afgeleide meet hoe snel de konijnenpopulatie verandert; de afgeleide is dus de groeisnelheid op een bepaald moment. (Voor deze grafiek moet je even geloven in fracties van konijnen. maar als je me tot nu toe geloofd hebt, zal dat geen probleem zijn.)



Dit alledaagse wiskundige concept lijkt veel op een poëtische fantasie. De afgeleide is de momentane verandering: verandering gevat in een moment, bliksem gevangen in een fles. Het is de weerlegging van Zeno, die zei dat er niets kan gebeuren in de tijdspanne van een enkel moment, en de rechtvaardiging van Hladik, die geloofde dat alles kan gebeuren in de tijdspanne van een enkel moment.



Je hebt nu misschien wel geraden hoe Hladiks verhaal afloopt. Twaalf maanden lang werkt hij aan zijn drama. Hij schrijft niet ‘voor het nageslacht’, zo vertelt Borges ons, ‘en ook niet voor God, wiens literaire voorkeuren hij nauwelijks kent’. Nee, hij schrijft voor zichzelf. Hij schrijft vanwege dat wat Thomas Wolfe beschouwde als het eeuwige verlangen van de kunstenaar:

*Het voor eeuwig vastleggen van een enkel moment uit het leven van de mens, een enkel moment van de schoonheid, de passie en de onuitspreekbare zeggingskracht van het leven, een moment dat tevoorschijn komt, opbloeit, en verdwijnt, en dat met het vallen van de zandkorrel van de tijd voor altijd door onze vingers glipt, voor altijd uit onze wanhopige greep wegstroomt, zoals een rivier stroomt en nooit vastgepakt kan worden.*

Hladik heeft de rivier vastgepakt. Het doet er niet toe dat niemand ooit *De Vijanden* zal lezen, of dat de kogels binnen geen tijd hun loop zullen hernemen. Het enige wat ertoe doet is dat hij zijn boek geschreven heeft, dat het nu bestaat op dit ene moment, dat zijn eigen soort eeuwigheid is.■