www.lannoo.com

Registreer u op onze website en we sturen u regelmatig een nieuwsbrief met informatie over nieuwe boeken en met interessante, exclusieve aanbiedingen.

Omslagontwerp: Studio Lannoo
Vormgeving binnenwerk: Studio Lannoo
Illustraties: Annelieke Hooymans

D/2020/45/582– NUR 493/918
ISBN 978 94 014 7183 1

Jan Guichelaar, Paul Levrie
en Roosmarij Vanhommerig

De dikke PYTHAGORAS

Meer dan 600 wiskundige
puzzels, spellen en doordenkers
voor jong en oud

Lannoo

VOORWOORD – 60 IS MOOIER DAN 50

Naar aanleiding van de zestigste verjaardag van het wiskundetijdschrift voor jongeren *Pythagoras* ligt voor u een verzameling van puzzels, raadsels, doordenkers en breinbrekers uit onze voorbije jaargangen. *Pythagoras* werd in 1961 opgericht op initiatief van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, met de leden Johan Wansink en Hans Freudenthal in de hoofdrollen. De eerste twee redacteuren waren Gerrit Krooshof en Hans de Rijk (alias Bruno Ernst, onder meer bekend van zijn boeken over M.C. Escher). Bruno Ernst is gedurende vier decennia een vaste steun geweest voor Pythagoras, als redacteur, hoofdredacteur en als auteur van zeer vele artikelen. Het doel van het tijdschrift was om jongeren kennis te laten maken met de veelzijdigheid en schoonheid van de wiskunde, en dat is ons streven tot op de dag van vandaag. Pythagoras is officieel een tijdschrift voor scholieren, maar wordt ook door vele andere wiskundeliefhebbers trouw gelezen.

Ter ere van onze 50ste verjaardag verscheen het boek *De Pythagoras Code*, een bundeling van artikelen uit een halve eeuw *Pythagoras*. Inmiddels zijn we 10 jaar verder. Waar de meeste mensen trots zijn als ze de mijlpaal 50 bereiken, worden wiskundigen gelukkiger van het getal 60. Niet omdat we dan 10 jaar ouder zijn, maar omdat voor ons 60 een mooier getal is dan 50. Het oude Babylonië (rond 3000 v.Chr.) wordt beschouwd als de geboorteplaats van de wiskunde en de Babyloniërs gebruikten een talstelsel op basis van 60. Tot op de dag van vandaag zien we deze geschiedenis terug in het dagelijks leven: 60 seconden in een minuut, $60 \times 60 = 3600$ seconden in een uur en $6 \times 60 = 360$ graden in een volle cirkel. Overigens waren de Babyloniërs al op de hoogte van de stelling van Pythagoras (die rond 600 v. Chr. leefde), zoals blijkt uit het gevonden kleitablet Plimpton 322 uit ongeveer 1700 v.Chr.
Bij het samenstellen van deze uitgave is het uitgangspunt geweest om vooral vraagstukken te selecteren op wiskundig inzicht, hoewel soms ook wat wiskundige kennis van de middelbare school nodig is. We hopen daarmee leerlingen en overige lezers te tonen dat wiskunde vooral een scherpe geest en creativiteit vereist.

Aan de samenstelling van dit boek hebben in het bijzonder ook de overige leden van de huidige redactie met adviezen, aanmoediging, correcties en bijzondere weetjes bijgedragen. De samenstellers van dit boek zijn daarom dank verschuldigd aan: Joery Allart, Matthijs Coster, Mike Daas, Jeanine Daems, Klaas Pieter Hart, Emiel Kaper, Niels Kolenbrander, Sjoerd Marbus en Lex Slort. Ook danken de samenstellers Cato Schuitemaker, leerlinge van het 4e Gymnasium in Amsterdam, voor haar zorgvuldige commentaar op de puzzels voorzien van één niveaubolletje.

Tot slot wil ik allen die zich vrijwillig ingezet hebben voor *Pythagoras* in de zestig voorbije jaren hartelijk danken. De inspanningen van velen van hen waren voor het voortbestaan van het tijdschrift niet zelden van levensbelang. Ook voor de lezers van dit boek en het tijdschrift *Pythagoras*: u bent onmisbaar in ons bestaan! We hopen nog vele jaren onze liefde voor de wiskunde met u te kunnen delen.

Roosmarij Vanhommerig
hoofdredactrice *Pythagoras*

WIST JE DIT? Er zijn oneindig veel zogeheten pythagorische drietallen: positieve gehele getallen a, b en c waarvoor geldt: $a^2 + b^2 = c^2$. Met het getal 60 als een van de drie getallen erin zijn er vier die niet vereenvoudigd kunnen worden (de drie getallen zijn onderling ondeelbaar):

$11^2 + 60^2 = 61^2$
$60^2 + 91^2 = 109^2$
$60^2 + 221^2 = 229^2$
$60^2 + 899^2 = 901^2$

WIST JE DIT OF WIST JE DAT

Naast de puzzels en problemen in het boek staan er veel wiskundige wetenswaardigheden onder de namen ‘Wist Je Dit’ of ‘Wist Je Dat’. Daarin staan leuke weetjes uit de wiskunde. Vaak ook wordt een probleem uit de doeken gedaan, waarvan al of niet de oplossing gegeven wordt. Zeker kan het de lezer vaak aan het denken en puzzelen zetten.

BIJ DE PUZZELS

Bij elke puzzel in dit boek ziet u twee symbolen staan. De bolletjes geven de moeilijkheidsgraad aan. Puzzels met één bolletje zijn met gezond verstand en eenvoudig rekenwerk op te lossen. Zij zijn geschikt voor leerlingen in de hoogste groepen van het basisonderwijs en de eerste klassen van het middelbaar onderwijs. Voor puzzels met twee bolletjes kan het bijvoorbeeld voorkomen dat er wat wiskunde uit de onderbouw van het middelbaar onderwijs nodig is, zoals het oplossen van enkele vergelijkingen. De puzzels met drie bolletjes vergen vooral een goed inzicht en flink wat denk- en/of puzzelwerk. Ook is dan soms de wiskunde van hogere klassen van het middelbaar onderwijs nodig. Verder geven de symbolen een indicatie van het onderwerp:

- Meetkundige puzzels en allerlei bewegings-, tijd-, klok- en meetproblemen.
- Bord- roosterpuzzels.
- Getal- en rekenpuzzels.
- Verdeelproblemen (o.a. weeg-, knip-, schenk- en geldproblemen).
- Kans- en telproblemen.
- Puzzels, spellen, logische en overige problemen.

Bij een aantal van de puzzels is de tekst en/of het bewijs aangepast om de eenheid en duidelijkheid te bevorderen of om de puzzel uitdagender te maken. In het tweede deel van het boek staan de uitwerkingen, bewijzen en antwoorden van de puzzels. Bij elke oplossing staat ook de jaargang en het nummer van *Pythagoras* gegeven waaruit de betreffende puzzel afkomstig is. In het archief op de site van *Pythagoras* is dan in het betreffende nummer veelal de auteur van de puzzel te vinden. Dat wil zeggen, indien de auteur expliciet genoemd is bij de puzzel. De puzzels zijn in de afgelopen zestig jaar verschenen onder diverse namen: o.a. Denkertjes, Kleine Nootjes, Pythagoras Olympiadeopgaven, Problemen. Een beperkt aantal puzzels is verschenen op de (sociale media-) sites van Pythagoras onder de naam Nootje Kraken. Bij de oplossingen zijn deze gecodeerd met een . Vooral in de beginjaren van het tijdschrift werden alle puzzels bedacht door de redacteuren, zonder dat hun namen bij de puzzels vermeld werden. Een groot gedeelte van de puzzels is origineel. Ook zijn er zeker puzzels die deels berusten op puzzels uit de *folklore* van de wiskunde voor liefhebbers en amateurs. Achterin het boek staat een lijst met redacteuren en vaste medewerkers aan *Pythagoras* met achter hun namen het jaar van eerste vermelding.

PAGINANUMMERS

Op elke pagina staat naast het paginanummer dit nummer geschreven als een korte som: een korte rij cijfers (1 1 2 2 3 3 4 4 5, telkens twee van ieder cijfer) met tekens en bewerkingen. De cijfers staan in een vaste volgorde. Toegestaan zijn de tekens/bewerkingen +, –, ×, /, haakjes en catenatie (dus 1, 2 en 2 kunnen gebruikt worden als het getal 122). Voorbeelden:

$(1 + 1 + 223)/3 - (44 - 5)$ voor pagina 36 of

$-1 \times 1 + ((-2/2 + 3) \times 3 + 4) \times 4 + 55$ voor pagina 94.

Op elke pagina staat een oplossing voor het betreffende paginanummer. De puzzel voor de lezer is om een betere oplossing te vinden, door het laatste cijfer of de laatste twee cijfers weg te laten en opnieuw het paginanummer te maken.

OVER DE SAMENSTELLERS VAN HET BOEK

Jan Guichelaar (1945) is theoretisch fysicus en heeft, naast zijn publicaties in de fysica, gepubliceerd over wetenschapshistorie, onder andere over de geschiedenis van de Nederlandse sterrenkunde in het begin van de twintigste eeuw. Hij is sinds 2001 redacteur van Pythagoras. De selectie van de puzzels en opgaven in dit boek is van zijn hand.
E-mailadres: jan@pyth.eu.

Paul Levrie (1959) geeft les aan de Faculteit Toegepaste Ingenieurswetenschappen van de Universiteit van Antwerpen. Hij is wiskundige en probeert al jaren de wiskunde meer populair te maken in Vlaanderen. Hiervoor schreef hij o.a. in 2014 samen met collega Rudi Penne een boek voor de geïnteresseerde wiskundeleek met als titel De Pracht van Priemgetallen. Hij is sinds 2011 redacteur van Pythagoras.
E-mailadres: paul@pyth.eu.

Roosmarij Vanhommerig (1981) is wiskundige en werkt als freelancer in het wiskundeonderwijs. In een divers scala aan projecten deed ze ervaring op als o.a. docent, vakdidacticus, auteur en projectleider variërend van basisschool tot en met hogeschool. Zij is sinds 2017 hoofdredactrice van Pythagoras.
E-mailadres: roosmarij@pyth.eu.

REDACTEUREN EN VASTE MEDEWERKERS

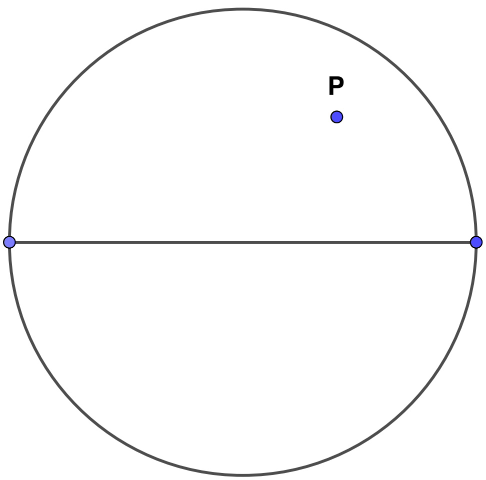
Sinds 1961 met jaar van eerste vermelding.
Gerrit Krooshof (1961), Hans de Rijk (alias Bruno Ernst) (1961), A.F. van Tooren (1963), A.B. Oosten (1966), H.J. Engels (1968), G.A. Vonk (1968), A.J. Elsenaar (1969), C. van der Linden (1969), R.H. Plugge (1969), W. Kleijne (1973), Henk Mulder (1974), Jan van de Craats (1979), Hessel Pot (1982), Luc Kuijk (1983), Klaas Lakeman (1983), Leo Wiegerink (1983), Popke Bakker (1988), Gerard Baüerle (1988), F. van der Blij (1988), Niels Buizert (1988), Hans Lauwerier (1988), H. Duparc (1991), Bob de Jongste (1991), Henk Huysmans (1991), Thijs Notenboom (1991), Hans Oomis (1991), Frank Roos (1991), Paul van de Veen (1992), Jan Mahieu (1993), Marcel Snel (1993), Wim Oudshoorn (1995), Sander van Rijnswou (1995), Ronald van Luijk (1996), Dion Gijswijt (1996), Klaas Pieter Hart (1996), Harald Haverkorn (1996), Erjen Lefeber (1996), Pier Sinia (1996), Chris Zaal (1996), René Swarttouw (1997), André de Boer (1999), Allard Veldman (2000), René Pannekoek (2000), Jan Tuitman (2000), Alex van den Brandhof (2001), Matthijs Coster (2001), Jan Guichelaar (2001), Marco Swaen (2001), Dick Beekman (2003), Arno Kret (2006), Anne de Haan (2006), Iris Smit (2006), Arnout Jaspers (2006), Jeanine Daems (2007), Alexander van Hoorn (2009), Eddy Nijholt (2009), Tijmen Veltman (2009), Paul Levrie (2011), Marc Seijlhouwer (2012), Derk Pik (2012), Harry Smit (2013), Michelle Sweering (2016), Bas Verseveldt (2016), Christian Eggermont (2017), Emiel Kaper (2017), Roosmarij Vanhommerig (2017), Mike Daas (2020), Niels Kolenbrander (2020), Sjoerd Marbus (2020), Joery Allart (2020), Lex Slort (2020).

PUZZELS

1

ALLEEN MET EEN LINIAAL

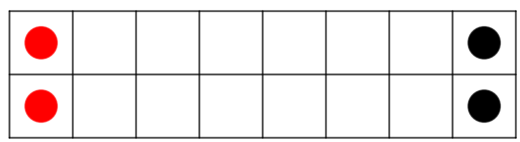
Gegeven is een cirkel met een middellijn (maar niet met het middelpunt) en een punt P binnen de cirkel. Hoe construeer je, alleen met een liniaal, een loodlijn vanuit P op deze middellijn?



2

HEEN EN WEER

Zwart en Rood hebben in de beginstand ieder twee stukken op het bord (zie de figuur) en moeten om beurten een zet doen, naar keuze net zoveel velden (minstens een) naar rechts of links, maar niet over of op het veld van een stuk van de tegenstander. Wie geen zet meer kan doen, heeft verloren. Rood moet de eerste zet doen. Wie van de twee kan met steeds de goede zetten altijd winnen: Rood of Zwart?



3

OPTELLING MET *ABC*

Welke cijfers stellen de letters *a*, *b* en *c* in de volgende optelling voor:
aaa + *bbb* + *ccc* = *baac*? Hierin zijn (on)gelijke letters (on)gelijke cijfers.

WIST JE DAT een van de oudste getalstelsels op de wereld zestigtallig was? De Babyloniërs, een verzamelnaam voor verschillende volkeren die in Mesopotamië leefden (de regio waar nu Irak ligt), ontwikkelden vanaf ongeveer 3000 v.Chr. wiskunde. Aan het eind van het derde millennium v. Chr. hadden ze een zestigtallig, goed werkend getalstelsel. Het was een positiestelsel, net zoals ons eigen getalsysteem: de plek van een cijfer in een getal bepaalt de waarde ervan. In ons getal 1231 betekenen de twee enen niet hetzelfde: de ene 1 staat voor 1 duizendtal, de andere voor 1 eenheid. Bij de Babyloniërs ging dat net zo, behalve dat een plek naar links bij hen een vermenigvuldiging met 60 betekende (waar dat bij ons met 10 gaat). Wij hebben in ons tientallige positiestelsel tien cijfers nodig om alle getallen te kunnen opschrijven. De Babyloniërs hadden er dus zestig nodig. Of eigenlijk 59, want ze hadden nog geen 0, daarvoor gebruikten ze alleen een lege plek (wat dus soms wat onhandig was). De Babylonische cijfers werden geschreven op kleitabletten in spijkerschrift. Om de cijfers 1 t/m 59 op te schrijven werden twee symbolen gebruikt, een ‘spijker’ voor 1 en een ‘winkelhaak’ voor 10.

4 | ✂ | ●●○

VIJFTIEN TIJDSCHRIFTEN

Vijftien tijdschriften liggen op een tafel en bedekken deze volledig. Bewijs dat het mogelijk is zeven van die tijdschriften weg te nemen, zodat de overblijvende acht minstens $\frac{8}{15}$ van de oppervlakte van de tafel bedekken.

5 | ✂ | ●○○

26 MUNTEN

In een zak zitten 26 munten. Als je 20 willekeurige munten uit die zak pakt, dan heb je minstens 1 munt van 1 eurocent, 2 munten van 2 eurocent en 5 munten van 5 eurocent. Hoeveel zijn de 26 munten samen waard?

6 | ●○○

DIENSTREGELING

Tussen de plaatsen A en B is een druk busverkeer. In beide richtingen vertrekken de bussen om de tien minuten (onder andere op de hele uren). De reis van A naar B duurt, evenals die van B naar A, precies 35 minuten. Elke chauffeur krijgt zowel in A als in B een kwartier rust. Hoeveel bussen en chauffeurs zijn er nodig om deze dienstregeling uit te voeren?

7 | ●●●

WIT EN ZWART

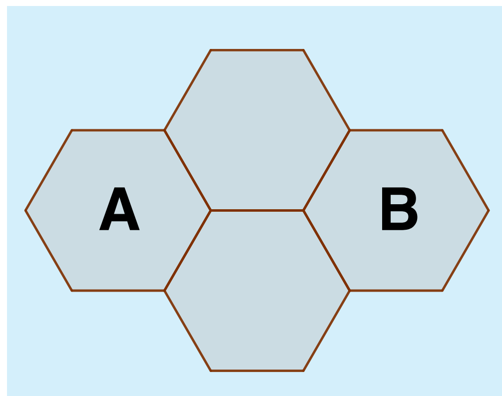
Op een massieve bol is een willekeurig aantal cirkels getekend. Daardoor is de oppervlakte van de bol in een aantal gebieden verdeeld. Is het nu, ongeacht de ligging en de grootte van die cirkels, altijd mogelijk een beschildering van die bol te maken met de volgende twee eigenschappen:

a. elk gebied is in zijn geheel wit of in zijn geheel zwart,
b. twee gebieden waarvan de grenzen een cirkelboog gemeen hebben, hebben verschillende kleuren?

8 | ●●○

HONINGBIJ

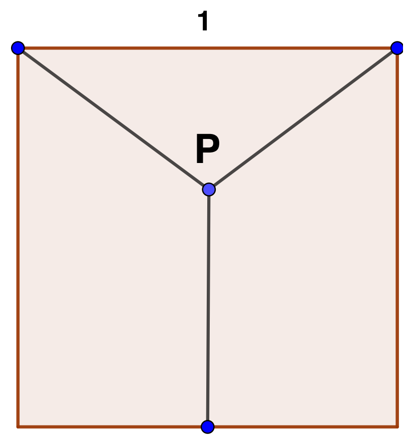
Een bij vliegt van cel naar cel. Daarbij gaat ze telkens van een cel naar een willekeurige aangrenzende cel, elk met gelijke kans. Zo kan ze in twee keer vliegen van cel A naar cel B komen, maar meestal doet ze daar langer over. Hoeveel vluchten heeft ze gemiddeld nodig om van A naar B te komen?



10 | ●●○

DRIE GELIJKE AFSTANDEN

Punt P ligt zo binnen een vierkant met zijden 1 dat het gelijke afstanden heeft tot twee opeenvolgende hoekpunten en tot de zijde tegenover deze hoekpunten. Bereken deze afstand.



9 | ●○○

KLOK LOOPT ACHTER

Piet vertrekt op de fiets naar school en ziet dat de klok thuis op half negen staat. Hij weet dat die klok iets achterloopt. Als hij op school aankomt, is het 8:55 uur op de goed werkende schoolklok. Piet fietst, even snel als op de heenweg, om 12:03 uur op de schoolklok weg van school en ziet bij thuiskomst de klok thuis op 12:16 uur staan. Hoeveel loopt de klok thuis achter?

WIST JE DAT de drie afstanden in de figuur in de opgave een steinerboom wordt genoemd, naar de wiskundige Jakob Steiner? Zo'n steinerboom heeft ook praktische toepassingen, bijv. bij de aanleg van een elektriciteitsnetwerk. Stel je voor dat de drie eindpunten van de boom steden zijn die je met elkaar wilt verbinden. Als je de bekabeling doet via het centrale punt van de steinerboom, is de hoeveelheid kabel die je nodig hebt het kleinste.

11

DRIEHOEKEN VAN ÉÉN KLEUR

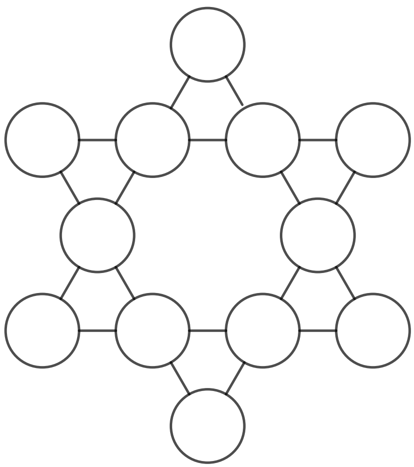
Je hebt 66 punten in de ruimte. Geen enkel drietal ligt op een rechte lijn. Je tekent in gedachten de lijnstukken tussen elk tweetal punten. Dan vormt elk drietal punten dus een driehoek. Je hebt vier kleuren en geeft aan elk lijnstuk een van die kleuren. Beredeneer dat je, hoe je de kleurverdeling ook maakt, altijd een driehoek hebt met drie gelijkgekleurde zijden.

WIST JE DIT? Het probleem in puzzel 11 komt uit een gebied van de wiskunde dat de ramseytheorie heet, naar Frank Ramsey (1903–1930), een Engels filosoof, wiskundige en econoom. In de *Pythagoras* van april 2005 staat een stuk over de stelling van Ramsey. Als je de oplossing goed leest, zul je zien dat als je de lijnen tussen zes punten met twee kleuren kleurt, er altijd een driehoek van één kleur zal zijn. Ook zul je zien dat er altijd een driehoek van één kleur is bij zeventien punten en drie kleuren. In die twee gevallen geldt dat zes en zeventien niet beter kunnen: bij vijf punten is er een kleuring met twee kleuren zonder driehoek van één kleur, en bij zestien punten is er een dergelijke kleuring met drie kleuren. Bij hoeveel punten heb je zeker een driehoek van één kleur bij vijf kleuren? En bij zes kleuren? Bij vier kleuren is overigens nog onbekend wat het beste aantal punten is: bij kleuringen van de lijnen tussen 62 punten is er altijd een driehoek van één kleur, en bij 51 punten is er een kleuring zonder zo'n driehoek; wat daartussen gebeurt weten we niet.

12 | ●●○

MAGISCHE SOM

Verdeel de getallen 1 tot en met 12 over de twaalf cirkels, zodat de getallen op elk van de zes lijnen dezelfde som hebben als de zes buitenste getallen.



13 | ●●○

TRAPLOPEN

Anne loopt iedere dag de trap op. De trap heeft dertien treden en ze neemt stappen van één of twee treden tegelijk. Ze wil het zo doen dat ze geen twee dagen dezelfde treden overslaat. Kan ze dat een jaar lang volhouden?

14 | ●●○

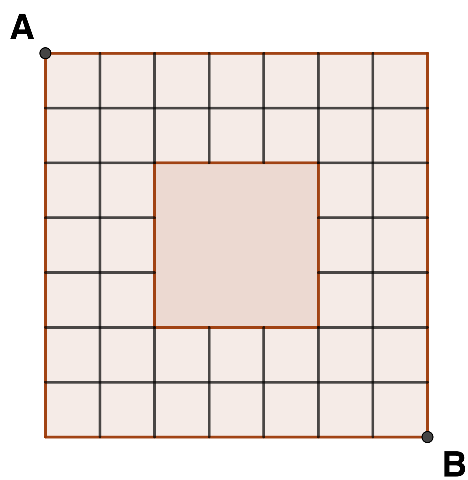
PROBLEEM MET 2*X* + 1

Kies een positief geheel getal. Herhaal nu de volgende stap: als het getal deelbaar is door 3, 5 of 7, deel het dan daardoor. Zo niet, vermenigvuldig het getal met 2 en tel er 1 bij op. Bijvoorbeeld: 23→47→95→19→39→13→27→9→3→1. Kom je op deze manier met elk begingetal bij 1 uit?

15 | ●●●

KORTSTE ROUTES

Hoeveel kortste routes zijn er van punt A naar punt B, waarbij je alleen over de roosterlijnen mag lopen?



$(1 \times 1 + 2 + 2) \times 3 = 15$

16

NOOIT EEN PRIEMGETAL

Het getal 37 is een priemgetal (dus alleen deelbaar door 1 en zichzelf). Als je achter 37 een willekeurig aantal enen plaatst (371, 3711, 37.111 enzovoort), is dat getal nooit priem. Toon dit aan.

17

VOUWEN

Een uit papier geknipte rechthoek, waarvan de lengte 16 cm en de breedte 12 cm is, wordt zo gevouwen dat twee overstaande hoekpunten op elkaar komen te liggen. Bereken de lengte van de vouw.