

WISKUNDE *is* OVERAL

INCLUSIEF HEERLIJK SIMPELE TEKENINGEN!

BEN ORLIN

 | LANNOO

Voor Taryn

INHOUD

INLEIDING	1
---------------------	---

I

DENKEN ALS EEN WISKUNDIGE

1. Boter-kaas-en-eieren-de-luxe	7
2. Hoe kijken leerlingen naar wiskunde?	20
3. Hoe kijken wiskundigen naar wiskunde?	22
4. Hoe kijken natuurwetenschappers en wiskundigen naar elkaar?	30
5. Goede wiskundigen en geweldige wiskundigen	38

II

ONTWERP: DE GEOMETRIE VAN DINGEN DIE WERKEN

6. De vorm die onze wereld mogelijk maakt.	52
7. Irrationeel papier.	65
8. Over vierkanten en kubussen	73
9. Het dobbelspel: voor 1 tot 7.500.000.000 spelers	89
10. Een mondelinge geschiedenis van de Death Star	105

III

KANSBEREKENING: DE WISKUNDE VAN HET MISSCHIEN

11. De tien mensen die in de rij staan voor een lot	123
12. Kinderen van de munt.	141
13. De rol van kansberekening in je beroep	151
14. Vreemde verzekeringen.	158
15. De economie kraken met een paar dobbelstenen.	178

IV

STATISTIEK: DE KUNST VAN HET EERLIJK LIEGEN

16. Waarom statistiek niet te vertrouwen is	199
17. De laatste 0,400-slagman	218
18. Barbaren aan de poort der wetenschap	231
19. De scorebordoorlogen.	249
20. De boekversnipperaars	267

V

OP HET KEERPUNT: DE KRACHT VAN EEN STAP

21. Het laatste greintje diamantstof.	286
22. Belastingschijfologie	299
23. Een staat, twee staten, rode staat, blauwe staat.	314
24. De chaos van de geschiedenis	329
NOTEN.	346
DANKWOORD	368

INLEIDING

Dit is een boek over wiskunde. Althans, dat was het plan. Ergens onderweg heb ik een afslag genomen en ben ik in een tunnelstelsel beland, zonder wifi of gsm-bereik. Toen ik de tunnels weer verliet, ging het boek nog altijd over wiskunde, maar ook over veel meer. Over waarom mensen meespelen met de loterij. Hoe een kinderboekenschrijfster een verkiezing in Zweden heeft beïnvloed. Wat een griezelroman tot een griezelroman maakt. Of het wel zo slim was van Darth Vader om een gigantisch bolvormig ruimtestation te bouwen. Ook dat is allemaal wiskunde. Wiskunde verbindt de gekste uithoeken van het leven, als een geheim stelsel van Mario-pijpen.



Vind je dit een vreemde definitie van wiskunde? Dan heb je vast wiskunde geleerd op school. Wat jammer voor je.

Toen ik in 2009 afstudeerde, meende ik te weten waarom mensen wiskunde niet leuk vonden: vanwege het slechte onderwijs. Wiskundelessen versnipperden een logisch kunstwerk tot een hoop confetti en gaven leerlingen de onmogelijke en saaie taak het oorspronkelijke geheel weer in elkaar te puzzelen. Geen wonder dat ze kreunden. Geen wonder dat ze de

mist ingingen. Geen wonder dat volwassenen huiverend op hun wiskundelessen terugkijken. De oplossing lag voor de hand: wiskunde vereiste een betere uitleg en betere uitleggers.

Toen werd ik leraar. Ik heb in mijn eerste jaar voor de klas een harde les geleerd: ik wist wel het nodige van wiskunde, maar begreep niets van wat het vak voor mijn leerlingen betekende en hoe ik het moest onderwijzen. Op een dag was ik ongemerkt in een debat over de zin van geometrie verzeild geraakt. Schreven volwassenen ellenlange bewijzen uit? Mochten ingenieurs geen rekenmachines gebruiken? Moest je alles van een parallellogram weten om je financiën te regelen? Het vak leek niet te verdedigen. Mijn leerlingen concludeerden: 'Wij studeren wiskunde om vervolgopleidingen en werkgevers te tonen dat we slim zijn en hard werken.' Wiskunde was voor hen een soort armpje drukken, een zinloos vertoon van slimheid, iets dat goed stond op je cv.

Mijn leerlingen hadden gelijk: wiskunde op school lijkt inderdaad wel een *survival of the fittest*. Maar wat zij niet begrepen – en ik niet kon uitleggen – was de diepere betekenis van wiskunde. Waarom vormt wiskunde de basis van alles? Hoe kan ze ogenschijnlijk gescheiden terreinen toch met elkaar verbinden: munten en genen, dobbelstenen en aandelen, boeken en honkbal? Omdat wiskunde een denksysteem is en elk probleem in de wereld baat heeft bij denken.

Sinds 2013 schrijf ik over wiskunde en onderwijs, soms voor tijdschriften, maar meestal voor mijn eigen blog. Mensen vragen me vaak waarom ik mijn teksten opfleur met knullige tekeningen. Vreemd. Niemand vraagt zich ooit af waarom ik zo matig kook – alsof ik stiekem een overheerlijke canard à l'orange kan maken, die ik uit principe anderen niet voorzet. Zo ook met mijn tekeningen: ik kan gewoon niet beter. *Wiskunde met heerlijk simpele tekeningen* klinkt minder zielig dan *Wiskunde met de beste tekeningen die ik kan maken, al doe ik nog zo mijn best*, maar in mijn geval is dat hetzelfde.

Mijn artistieke carrière begon toen ik een keer een hond op het bord tekende om een probleem te illustreren en de hele klas in lachen uitbarstte. De leerlingen vonden mijn gebrek aan tekentalent hilarisch, maar ook wel charmant. Zo werkt het vaak: wanneer mensen zien dat zogenaamde experts op een ander vlak heel slecht zijn, kan dat hen – en misschien ook hun vak – vermenschelijken. Zelfvernederig is sindsdien een belangrijk element van mijn didactiek geworden. Je treft het in geen enkele docentenopleiding aan, maar ach: het werkt.



In de klas gaat meestal alles zijn gangetje. Mijn leerlingen ervaren wiskunde als een mufte kelder waarin ze doelloos nietszeggende symbolen heen en weer moeten schuiven. Ze halen hun schouders op, leren de choreografie en doen een vreugdeloos dansje. Soms zien ze echter lichtpuntes in de verte en beseffen ze dat de kelder een geheime tunnel is, die alles wat ze weten verbindt met bijna al het andere. De leerlingen ploeteren, zijn creatief, leggen verbanden, zetten stappen, en bouwen aan die ongrijpbare deugd die we 'begrip' noemen.

In dit boek ga ik voorbij aan de technische details. Je zult hier weinig vergelijkingen aantreffen, en de meeste ervan dienen slechts ter decoratie. (De wiskundefanaat kan verdieping vinden in de noten.) Ik wil me juist richten op het hart van de wiskunde: de concepten. Ik zal je door allerlei landschappen voeren, die alle deel uitmaken van het ondergrondse netwerk van één groot idee. We bekijken hoe geometrische regels onze ontwerpkeuzen beperken; hoe je met kansberekening de bron der eeuwigheid aanboort; hoe ministapjes tot quantsprongen leiden; hoe statistiek de krankzinnige vormeloosheid van onze werkelijkheid inzichtelijk maakt.

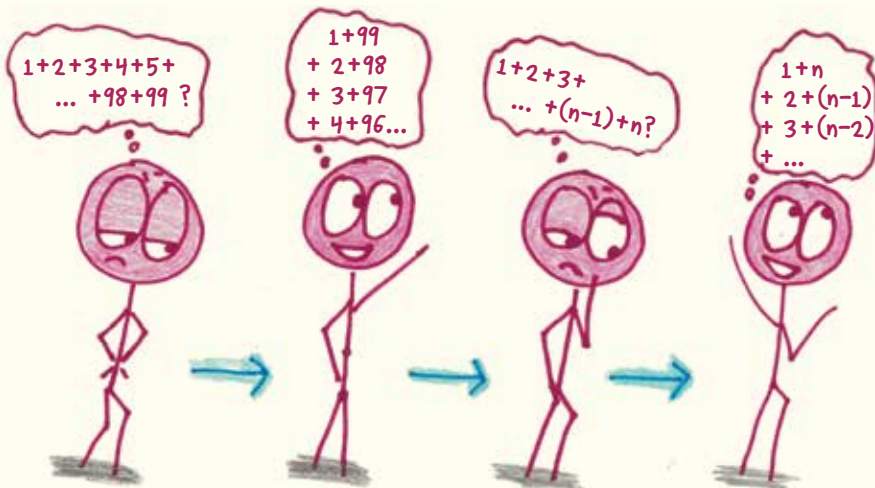
Bij het schrijven van dit boek ben ik op onverwachte plekken beland. Ik hoop dat jou bij het lezen ervan hetzelfde overkomt.

BEN ORLIN

I

DENKEN ALS EEN WISKUNDIGE

Om heel eerlijk te zijn: wiskundigen doen niet zoveel. Ze drinken koffie, turen naar schoolborden. Drinken thee, turen naar proefwerken. Drinken bier, turen naar bewijzen die ze het vorige jaar hebben opgeschreven maar die ze totaal niet meer begrijpen. Het is een leven van drinken, turen en vooral denken.



Wiskunde houdt zich niet bezig met fysieke voorwerpen: je hoeft geen scheikundige oplossingen te titreren, geen deeltjes te versnellen, geen financiële markten te vernietigen. Het enige wat een wiskundige doet, is nadenken. Wanneer we aan het rekenen slaan, veranderen we de ene abstractie in een andere. Wanneer we bewijzen leveren, bouwen we logische bruggen tussen verwante ideeën. Wanneer we algoritmen of computerprogramma's schrijven, charteren we een elektronisch brein om de gedachten te denken waarvoor ons fysieke brein te traag is, of te druk bezig met andere dingen.

Elk jaar dat ik doorbreng in het gezelschap van wiskundigen, leer ik nieuwe denkwijzen, nieuwe manieren om dat handige, universele gereedschap in onze schedel te gebruiken. Bijvoorbeeld hoe je een spel leert door je de regels eigen te maken, hoe je gedachten voor later kunt bewaren door ze op te schrijven met zwerige Griekse symbolen, hoe je van je fouten leert alsof het betrouwbare hoogleraren zijn, en hoe je veerkrachtig blijft wanneer de draak der verwarring aan je tenen komt knabbelen.

Kortom, wiskunde is een vorm van geestesarbeid.

Hoe zit het met dat 'nut voor de echte wereld' waar de wiskundige zo gewichtig over doet? Hoe kunnen ruimteschepen, smartphones en die vervloekte getargete pop-upreclame een gevolg zijn van dat zuivere abstracte denken? Geduld, mijn vriend. Dat komt allemaal later. Eerst beginnen we waar alle wiskundigen beginnen: met een spelletje...

Hoofdstuk 1

BOTER-KAAS-EN-EIEREN-DE-LUXE

WAT IS WISKUNDE?

Tijdens een picknick in Berkeley zag ik enkele wiskundigen hun frisbee inruilen voor een spelletje dat ik totaal niet had verwacht: boter-kaas-en-eieren.

Zoals je weet, is boter-kaas-en-eieren doodsaai. Omdat er maar enkele zetten mogelijk zijn, hebben ervaren spelers al snel de beste strategie uitgeknoebeld. Mijn spelletjes zien er allemaal als volgt uit:



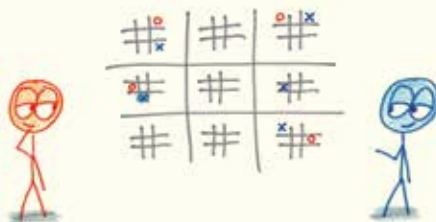
Als beide spelers de regels goed kennen, eindigt elk potje in een gelijkspel. Het spelletje biedt geen enkele ruimte voor creativiteit.

Maar tijdens die picknick in Berkeley speelden de wiskundigen niet het gewone boter-kaas-en-eieren. Ze gebruikten een ander spelbord, met een minibord in elk van de oorspronkelijke negen vakjes:¹

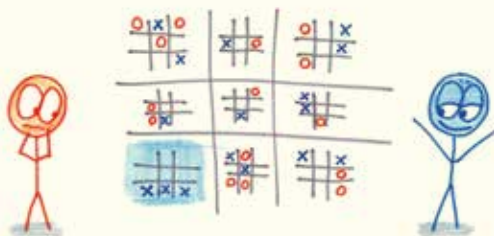


De basisregels werden me al snel duidelijk:

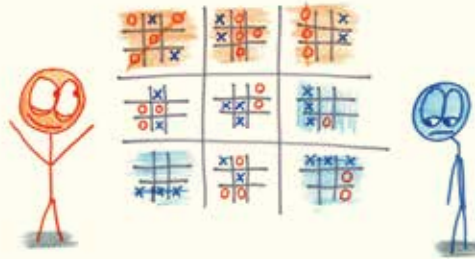
1. Bij elke beurt vul je een vakje op een minibord.



2. Als je op een minibord drie-op-een-rij krijgt, win je dat bord.

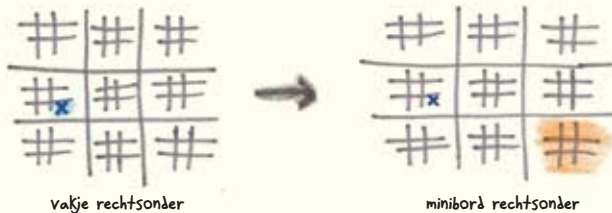


3. Als je drie miniborden-op-een-rij krijgt, win je het spel.

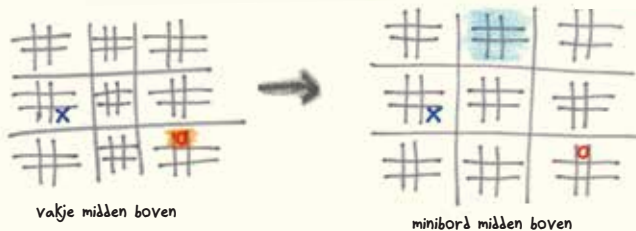


Het duurde echter een poos voordat ik de belangrijkste regel van het spel doorkreeg: je mag niet zelf kiezen op welk van de negen miniborden je speelt. Dat wordt bepaald door de vorige zet van je tegenstander. Jij moet op het grote bord in het vak spelen dat correspondeert met het vakje dat je tegenstander op het minibord heeft ingevuld. (En het vak dat jij op dat minibord kiest, bepaalt weer op welk minibord je tegenstander daarna speelt.)

Als ik hier speel... ...dan moet jij hier spelen.



En als jij hier speelt... ...dan moet ik hier spelen.



Door deze regel wordt boter-kaas-en-eieren een erg strategisch spel. Je kunt je niet op elk minibord apart concentreren. Je moet bedenken naar welke minibord je jouw tegenstander stuurt, en naar welk minibord je tegenstander jou stuurt.

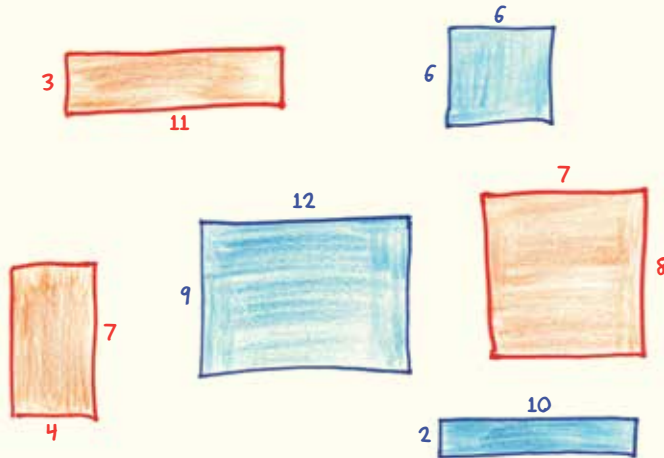
(Er bestaat één uitzondering op deze regel: als je tegenstander je naar een minibord stuurt dat al gewonnen is, mag je zelf kiezen op welk minibord je verder speelt.)

Het levert bizarre scenario's op, waarbij spelers gemakkelijke twee- en drie-op-een-rijen missen – als topvoetballers die hopeloos missen voor open doel. Er zit echter orde in de chaos. De spelers denken vooruit omdat ze bang zijn om hun tegenstander in een kansrijke positie te brengen. Een slimme aanval op een minibord kan je kwetsbaar maken op het grote bord, en andersom. Die spanning zit verweven in de opzet van het spel.

Ik speel boter-kaas-en-eieren-de-luxe soms met mijn leerlingen.² Ze genieten van de strategie en de kans om hun leraar te verslaan. (En ook van het feit dat ze even geen sinussen hoeven te berekenen.) Af en toe stelt een van hen de onnozele en logische vraag: 'Oké, leuk spelletje, maar wat heeft het met wiskunde te maken?'³

De wereld beschouwt mijn vak als een saaie dictatuur van onbuigzame regels, formules en procedures die net zo spannend zijn als een verzekering afsluiten of een belastingformulier invullen. Hier volgt zo'n duffe opdracht die we met wiskunde associëren:

Bepaal de oppervlakte en de omtrek van elke rechthoek.



Waarschijnlijk denk je al snel niet meer aan de concepten die eraan ten grondslag liggen. ‘Omtrek’ betekent niet langer de lengte van een wandeling langs de rand van de figuur, maar ‘elk van de cijfers maal twee, bij elkaar opgeteld’. ‘Oppervlakte’ verwijst niet naar het aantal vierkanten van 1×1 waarmee je de figuur kunt bedekken, maar naar ‘beide cijfers met elkaar vermenigvuldigd’. Het is als een gewoon potje boter-kaas-en-eieren: het is een kwestie van geesteloos rekenen, zonder enige creativiteit.

Maar net als boter-kaas-en-eieren-de-luxe heeft wiskunde veel meer te bieden dan dit gefröbel doet vermoeden. Wiskunde kan gewaagd zijn, grenzen verleggen en een balans vereisen tussen geduld en risico. Vervang het saaie probleem van zojuist maar eens door het volgende:

Vorm twee rechthoeken waarvan de eerste een grotere omtrek heeft, en de tweede een groter oppervlak.



Dit probleem levert een natuurlijke spanning op doordat je twee benaderingen van grootte (oppervlakte en omtrek) met elkaar vergelijkt. De oplossing van dit probleem vraagt meer dan simpelweg de toepassing van een formule. Het vereist dieper inzicht in de aard van rechthoeken. (Voor spoilers, zie de noten.)⁴

Of kijk eens naar deze opdracht:

Vorm twee rechthoeken waarvan de eerste twee keer de omtrek van de tweede heeft, en de tweede twee keer de oppervlakte van de eerste.



Al wat pittiger, nietwaar?

In twee stappen zijn we van een geestdodend trucje bij een behoorlijk lastig raadsel beland, waarop de pientere twaalfjarigen van mijn school de tanden hebben stukgebeten toen ik het als bonus aan hun eindtoets had toegevoegd. (Voor de oplossingen, zie de noten.)⁵

Creativiteit vereist vrijheid, maar vrijheid alleen is niet voldoende. Het pseudoraadsel ‘Tekenen twee rechthoeken’ biedt veel vrijheid, maar levert weinig vuurwerk op. Om aan te zetten tot werkelijke creativiteit moet een raadsel beperkingen hebben.

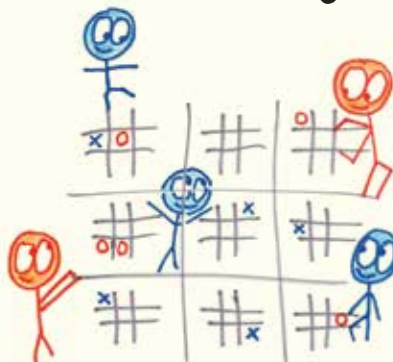
Neem boter-kaas-en-eieren-de-luxe. Bij elke beurt kun je maar uit enkele zetten kiezen, misschien drie of vier. Dat is voldoende om je verbeelding aan het werk te zetten, maar niet zoveel dat je verdrinkt in een zee van niet te berekenen mogelijkheden. Het spel heeft net voldoende regels, net voldoende beperkingen, om je vindingrijkheid te prikkelen.

Dat omschrijft mooi waarom wiskunde zo leuk is: het gaat om creativiteit die ontstaat uit beperkingen. Als het gewone boter-kaas-en-eieren wiskunde is zoals mensen haar kennen, dan is boter-kaas-en-eieren-de-luxe wiskunde zoals ze zou moeten zijn.

Wiskunde
zoals mensen
haar kennen.



Wiskunde
zoals ze zou
moeten zijn.



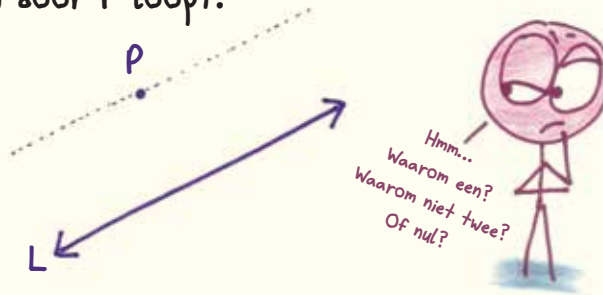
Alle creativiteit ontstaat uit een strijd tegen beperkingen. Om met de natuurkundige Richard Feynman te spreken: ‘Creativiteit is verbeelding in een dwangbuis.’ Neem het sonnet. De beperkingen van deze dichtvorm – Gebruik dit ritme! Hou je aan deze lengte! Laat de woorden rijmen! Oké... en nu met gevoel, Shakespeare! – ondermijnen het artistieke proces niet, maar stimuleren het. Of kijk naar sport. Mensen proberen doelen te bereiken (werk de bal in het net...) terwijl ze zich aan strenge regels houden (... zonder je handen te gebruiken). Zo vinden ze de omhaal en de duikkopbal uit. Als je de regels overboord gooit, gaat de elegantie verloren. Zelfs maffe, avant-gardistische kunstvormen, zoals de experimentele film, expressionistische schilderkunst en professioneel worstelen, ontlenuen hun kracht aan het spel met de beperkingen van het gekozen medium.

Creativiteit ontkiemt wanneer de geest op een obstakel stuit. Ze is het menselijke proces om een weg door, over, om of onder iets te vinden. Zonder obstakel geen creativiteit.

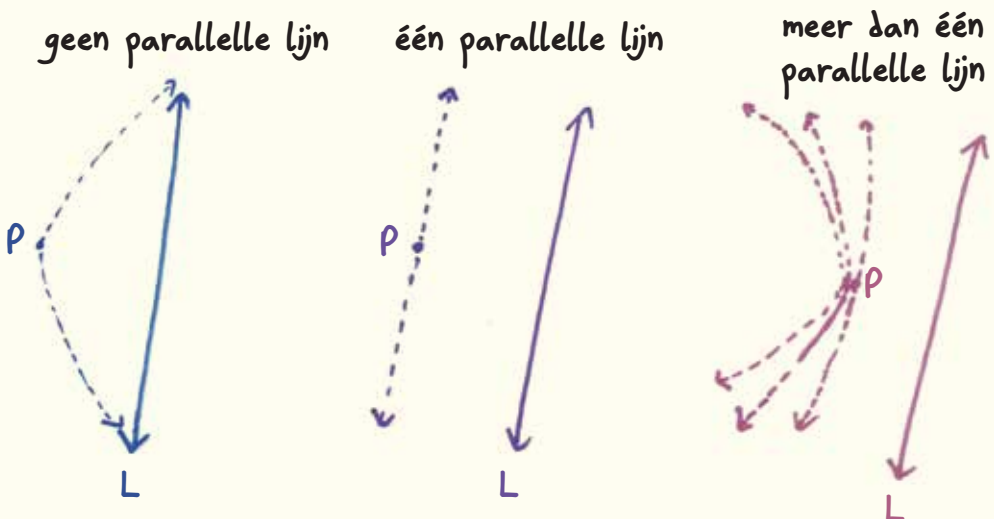
Wiskundigen gaan een stap verder. Ze volgen niet alleen regels. Ze vinden ze uit. Ze stellen ze bij. Ze stellen een beperking voor, onderzoeken de logische gevolgen ervan en als dat pad naar de vergetelheid voert – of erger, naar verveling – gaan ze op zoek naar een interessantere route.

Wat gebeurt er bijvoorbeeld wanneer ik een kleine aanname over parallelle lijnen ter discussie stel?

Er is maar één lijn die parallel is aan L
en door P loopt.

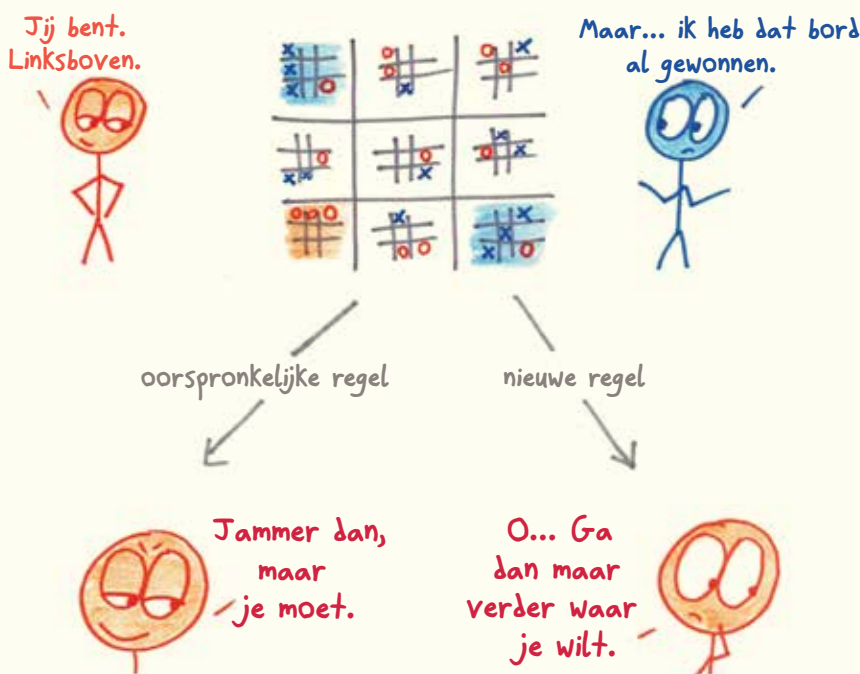


Euclides heeft deze regel in 300 v.Chr. opgesteld. Hij ging ervan uit dat zijn regel klopte en noemde het een fundamentele aanname ('axioma'). Zijn opvolgers vonden dit raar. Moesten ze dit zomaar aannemen? Moesten ze het niet bewijzen? Geleerden hebben twee millennia met deze regel zitten knoeien, als een etensrest tussen hun tanden. Toen beseften ze: het is maar een aanname. Je kunt ook iets anders aannemen. Als je dat doet, stort de traditionele geometrie in elkaar en doemen vreemde, alternatieve geometrieën op, waarin de woorden 'parallel' en 'lijn' totaal iets anders betekenen.



Een nieuwe regel, een nieuw spel.

Hetzelfde blijkt ook te gelden voor boter-kaas-en-eieren-de-luxe. Al snel ontdekte ik dat er één kwestie is waarvan alles afhangt: wat gebeurt er als mijn tegenstander me naar een minibord stuurt dat al gewonnen is? Tegenwoordig antwoord ik met de regel die ik eerder genoemd heb: aangezien dat minibord al ‘gesloten’ is, kun je verdergaan waar je wilt. Oorspronkelijk had ik echter een andere regel: zolang er een lege ruimte op dat minibord is, moet je daarheen gaan, ook al is het een verloren zet.



Dat klinkt niet indrukwekkend, slechts één draad in het weefsel van het spel. Maar wat gebeurt er als we aan deze draad trekken? Ik heb de gevolgen van deze ene regel laten zien met een openingsstrategie die ik (in alle bescheidenheid) ‘het Orlin-gambiet’ heb gedoopt. Ze gaat als volgt:

