CAMPUS HANDBOEK

BIEKE MASSELIS EN IVO DE PAUW

Wiskunde voor multimedia

LANNOO CAMPUS

Hoofdstuk 1, David Ritter; 2, John Evans; 3, Wouter Verweirder; 4, Daryl Beggs, Juan Pablo Arancibia Medina; 5, Stephanie Berghaeuser; 6, 10, Wouter Tansens; 7, Danie Pratt; 8, Ken Munyard; 9, Bieke Masselis; p.17, p.93, Wouter Tansens; p.44, Wouter Verweirder; p.48, Leo Storme; p.214, Yu-Sung Chang.

D/2016/45/378 – ISBN 978 94 014 3792 9 – NUR 918

Vormgeving: Jurgen Leemans, Peter Flynn en Bavo Langerock
Omslagontwerp: Studio Lannoo en Keppie & Keppie

LannooCampus maakt deel uit van de Lannoo Groep

Uitgeverij LannooCampus
Erasme Ruelensvest 179 bus 101
B - 3001 Leuven
www.lannoocampus.com.

Inhoud

Dankwoord 11

Hoofdstuk 1 · Instapwiskunde 13

1.1 Letterrekenen 14

Reële getallen 14

Reële veeltermen 19

1.2 Vergelijkingen met één onbekende 21

Lineaire vergelijkingen 21

Kwadratische vergelijkingen 22

1.3 Reflectie 29

Hoofdstuk 2 · Stelsels 31

2.1 Definities 32

2.2 Oplossingsmethodes 34

Substitutiemethode 34

Eliminatiemethode van Gauss 35

2.3 Reflectie 40

Hoofdstuk 3 · Goniometrie 43

3.1 Hoeken 44

3.2 Driehoeken 46

3.3 Goniometrische getallen 50

3.4 Eenheidscirkel 51

3.5 Merkwaardige hoeken 53

Goniometrische getallen van een hoek van $45° = \frac{\pi}{4}$ rad 54

Goniometrische getallen van een hoek van $30° = \frac{\pi}{6}$ rad 54

Goniometrische getallen van een hoek van $60° = \frac{\pi}{3}$ rad 55

Grafische voorstelling 55

3.6 Verwante hoeken 56

3.7 Somformules 56

3.8 Inverse goniometrische getallen 59

3.9 Reflectie 61

Hoofdstuk 4 · Functies 63

4.1 Begrippen uit de reële analyse 64
4.2 Veeltermfuncties 65
Lineaire functies 65
Kwadratische functies 67
4.3 Snijpunten tussen functies 69
4.4 Goniometrische functies 71
Elementaire sinusfunctie 71
Algemene sinusfunctie 71
Transversale trillingen 75
4.5 Inverse goniometrische functies 75
4.6 Reflectie 79

Hoofdstuk 5 · De gulden snede 81

5.1 Het gulden getal 82
5.2 De gulden snede 84
De gulden driehoek 84
De gulden rechthoek 85
De gulden spiraal 86
De gulden vijfhoek 88
De gulden ellips 88
5.3 Gulden rekenkunde 89
Gulden betrekkingen 89
De Fibonacci-getallen 90
5.4 Gulden snede illustraties 93
5.5 Reflectie 95

Hoofdstuk 6 · Vectoren 97

6.1 Wat zijn vectoren 98
Vectoren als pijlen (georiënteerde lijnstukken) 98
Coördinatenvoorstelling 99
Vrije vectoren 102
Basisvectoren 102
6.2 Optellen van vectoren 103
Vectoren als pijlen 103
Coördinatenvoorstelling 103
Samenvatting optelling van vectoren 104
6.3 Scalair veelvoud van een vector 105
Vectoren als pijlen 105
Coördinatenvoorstelling 105

Samenvatting van het scalair veelvoud 106
Eigenschappen 106
6.4 Vectorverschil 107
Vrije vectoren maken 107
Eulerpaden 108
6.5 Ontbinden van vectoren 109
Ontbinden van vlakke vectoren 109
Definitie basisvectoren 110
6.6 Inwendig product (dotproduct) 110
Definitie 110
Meetkundige betekenis 112
Orthogonaliteit (loodrechte stand) 114
6.7 Uitwendig product (crossproduct) 115
Definitie 116
Meetkundige betekenis 118
Parallellisme (evenwijdige stand) 120
6.8 Normaalvectoren 121
6.9 Reflectie 123

Hoofdstuk 7 · Parameters 125
7.1 Parametervergelijkingen 126
7.2 Vectorvergelijking van een rechte 127
7.3 Snijpunt van rechten 131
7.4 Vectorvergelijking van een vlak 133
7.5 Reflectie 137

Hoofdstuk 8 · Matrices 139
8.1 Wat zijn matrices 140
8.2 Determinant van een vierkante matrix 141
8.3 Som en verschil van matrices 143
8.4 Scalair veelvoud van een matrix 145
8.5 Getransponeerde matrix 146
8.6 Vermenigvuldigen van matrices 146
Inleidend voorbeeld 146
Voorwaarde 148
Definitie 148
Eigenschappen 149
8.7 Inverse matrix 151
Inleiding 151
Definitie 151

Opmerkingen 152
Rij-reductie 152
Berekening van inverse matrix 153
Inverteren van een product 156
Oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen 157
8.8 De Fibonacci-operator 159
8.9 Reflectie 161

Hoofdstuk 9 · Lineaire transformaties 163
9.1 Translatie 164
9.2 Schaalverandering 169
9.3 Rotatie 172
Rotatie in twee dimensies 172
Rotatie in drie dimensies 174
9.4 Spiegeling 176
9.5 Scheefduwing 178
9.6 Samenstellen van de standaardtransformaties 180
2D rotatie ten opzichte van een willekeurig punt 183
3D schaalverandering ten opzichte van het centrum van een figuur 185
2D spiegeling rond een rechte door de oorsprong 186
Spiegeling rond een willekeurig rechte 188
Gecombineerde 3D rotatie 191
9.7 Rij-formalisme 192
9.8 Reflectie 193

Hoofdstuk 10 · Bézier krommen 195
10.1 Parametervoorstelling 196
Lineair Bézier segment 196
Kwadratisch Bézier segment 197
Kubisch Bézier segment 198
Hogere-graads Bézier segmenten 200
10.2 De Casteljau constructie 201
10.3 Bézier krommen 202
Aaneenzetting 202
Lineaire transformaties 204
Toepassingen 204
10.4 Matrixvoorstelling 206
Lineair Bézier segment 206
Kwadratisch Bézier segment 207
Kubisch Bézier segment 208

10.5 B-splines 210
Kubische B-splines 210
Matrixvoorstelling 211
De Boor constructie 213
10.6 Reflectie 215

Bijlage A · Reële getallen in computers 217
A.1 Wetenschappelijke getalnotatie 217
A.2 De decimale computer 217
A.3 Uitzonderingswaarden 218

Bijlage B · Notatie-afspraken 219
B.1 Alfabetten 219
Latijns alfabet 219
Grieks alfabet 219
B.2 Wiskundige symboliek 220
Verzamelingen 220
Wiskundige symbolen 221
Wiskundige sleutelwoorden 221
Markante getallen 222

Bijlage C · Wegwijzers 223
C.1 Interactief 223
C.2 Antwoorden 223

Bronvermelding 224

Index 227

Dankwoord

Volgende mensen bleken van onmisbaar tot onschatbaar bij het maken van dit boek en worden door ons uitdrukkelijk bedankt: Prof. Dr. Leo Storme, Wim Serras, Wouter Tansens, Wouter Verweirder, Koen Samyn, Hilde De Maesschalck, Ellen Deketele, Conny Meuris, Hans Ameel, Dr. Rolf Mertig, Dick Verkerck, ir. Gose Fischer, Prof. Dr. Fred Simons, Sofie Eeckeman, Dr. Luc Gheysens, Dr. Bavo Langerock, Wauter Leenknecht, Marijn Verspecht, Sarah Rommens, Prof. Dr. Marcus Greferath, Dr. Cornelia Roessing, Tim De Langhe, Niels Janssens, Peter Flynn, Jurgen Leemans, Jan Middendorp, Hilde Vanmechelen, Jef De Langhe, Ann Deraedt, Rita Vanmeirhaeghe, Prof. Dr. Jan Van Geel, Dr. Ann Dumoulin, Bart Uyttenhove, Rik Leenknegt, Peter Verswyvelen, Roel Vandommele, ir. Lode De Geyter, Bart Leenknegt, Olivier Rysman, ir. Johan Gielis, Frederik Jacques, Kristel Balcaen, ir. Wouter Gevaert, Bart Gardin, Dieter Roobrouck, Dr. Yu-Sung Chang (*WolframDemonstrations*), Steven Verborgh, Ingrid Viaene, Thomas Vanhoutte, Fries Carton en iedereen die we even waren vergeten!

Hoofdstuk 1 · Instapwiskunde

Dit hoofdstuk omvat de onmisbare lees- en rekenvaardigheden voor het verder bestuderen van allerlei technologische onderwerpen in hun rekenomgeving.

De opeenvolgende paragrafen van dit hoofdstuk stippen met dit oogmerk stapsgewijze aspecten van de 'wiskundige taal' aan die wordt gesproken op allerlei toepassingsniveaus.

1.1 Letterrekenen

Reële getallen

We noteren de verzameling van alle:

- natuurlijke getallen (unsigned integers) als $\mathbb{N}$,
- gehele getallen (integers) als $\mathbb{Z}$,
- rationale getallen of breuken als $\mathbb{Q}$,
- reële getallen (floats of reals) als $\mathbb{R}$.

Deze getallenverzamelingen zijn als volgt genest: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

We vervolgen met wat terminologie, waar vaak verwarring over bestaat, zodat we dezelfde taal spreken. We wijzen erop dat het correct verwoorden ervan een weerspiegeling is van correct denkwerk.

Verzamelingen

- **Deelverzamelingen** worden altijd tussen accolades genoteerd, bijvoorbeeld de **ledige verzameling** noteren we als $\{\}$.
- Een **singleton** definiëren we als een verzameling met juist één element. We geven $\{5\}$ als voorbeeld van een singleton. Dit is een deelverzameling van de verzameling van de natuurlijke getallen, $\{5\} \subset \mathbb{N}$.
- Een **paar** definiëren we als een verzameling met juist twee elementen. De verzameling van de Booleaanse waarheidswaarden vormt bijvoorbeeld een paar $\{$*waar*, *onwaar*$\}$, kortweg te noteren als $\mathbb{B}$. Geven we anderzijds $\{115, -4\}$ als voorbeeld, dan is dit paar een deelverzameling van de verzameling van de gehele getallen of in symbolen $\{115, -4\} \subset \mathbb{Z}$.
- Deelverzamelingen zoals $\mathbb{Z}^-$ definiëren we als $\{\ldots, -3, -2, -1\}$ of de verzameling van enkel de negatieve gehele getallen. We noteren $-1234 \in \mathbb{Z}^-$ als we benadrukken dat het negatief getal -1234 een **element** is van $\mathbb{Z}^-$.

- Als we elementen uit een verzameling wegnemen, doen we dat met de **verschilbewerking** voor verzamelingen, die genoteerd wordt als 'backslash'. Zo noteren we bij wijze van illustratie hiervan de verzameling van de natuurlijke getallen zonder nul als $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, de verzameling van alle breuken uitgezonderd de gehele getallen als $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ en de verzameling van alle reële getallen uitgezonderd nul en één als $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Hoofdbewerkingen

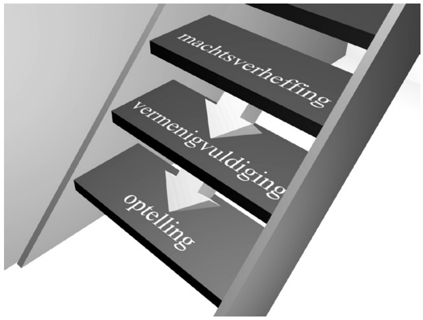
operatie	**voorbeeld**	**getal *a* heet**	**getal *b* heet**	**uitkomst *c* heet**
optelling	$a + b = c$	term	term	som
aftrekking	$a - b = c$	term of aftrektal	term of aftrekker	verschil
vermenigvuldiging	$a \cdot b = c$	factor	factor	product
deling	$\frac{a}{b} = c, b \neq 0$	deeltal of teller	deler of noemer	quotiënt
machtsverheffing	$a^b = c$	grondtal	exponent	macht
worteltrekking	$\sqrt[b]{a} = c$	grondtal	wortelexponent	wortel

Het **tegengestelde** van een reëel getal r noteren we als $-r$ en definiëren we als $r + (-r) = 0$. Het **omgekeerde** van een reëel getal r noteren we als $\frac{1}{r}$, ofwel r^{-1} en definiëren we als $r \cdot r^{-1} = 1$. Aftrekken definiëren we als het optellen met het tegengestelde: $a - b = a + (-b)$. Delen definiëren we als het vermenigvuldigen met het omgekeerde: $a : b = a \cdot b^{-1}$.

Wanneer bewerkingen elkaar ontmoeten, zijn we gehouden aan rekenregels. We herhalen hiertoe alle essentiële rekenregels in een notendop. Er geldt een vaste volgorde voor het uitvoeren van bewerkingen in $\mathbb{R}$, dat gememoriseerd kan worden met de volgende zin 'Het Mannetje won Van De Oude Aap'.

- Eerst alles uitrekenen tussen de haakjes,
- daarna alle machten (een vierkantswortel is ook een macht),
- dan alle vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts,
- ten slotte de optellingen en aftrekkingen van links naar rechts.

Er geldt ook **distributiviteit** in $\mathbb{R}$. Distributiviteit definiëren we als de verdeel-eigenschap van een 'hogere' bewerking over een 'lagere' bewerking. Distributiviteit vereist dus twee *verschillende* bewerkingen.



Zo noteren we distributiviteit van *machtsverheffen* over *vermenigvuldigen* bijvoorbeeld als $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$. Eveneens noteren we de distributiviteit van *vermenigvuldigen* over *optellen* als $3 \cdot (a+b) = 3 \cdot a + 3 \cdot b$.

We hoeden ons ervoor tegen deze 'trap van distributiviteit' fouten te maken:

$$(a+b)^3 \neq a^3 + b^3,$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \neq x+y.$$

Breuken

Een **breuk** is de schrijfwijze van een rationaal getal onder de vorm $\frac{t}{n}$ met $t, n \in \mathbb{Z}$ en $n \neq 0$. In $\frac{t}{n}$ is t de **teller** en n de **noemer**. De omgekeerde breuk van $\frac{t}{n}$ met $t, n \neq 0$ definiëren we als $\frac{1}{\frac{t}{n}} = \frac{n}{t}$, ofwel $\left(\frac{t}{n}\right)^{-1}$. De tegengestelde breuk is dan gelijk aan $-\frac{t}{n} = \frac{-t}{n} = \frac{t}{-n}$. De rekenregels voor breuken kunnen we als volgt samenvatten:

som	$\frac{t}{n} + \frac{a}{b} = \frac{t \cdot b + n \cdot a}{n \cdot b}$,
verschil	$\frac{t}{n} - \frac{a}{b} = \frac{t \cdot b - n \cdot a}{n \cdot b}$,
product	$\frac{t}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{t \cdot a}{n \cdot b}$,
deling	$\frac{\frac{t}{n}}{\frac{a}{b}} = \frac{t}{n} \cdot \frac{b}{a}$,
machtsverheffing	$\left(\frac{t}{n}\right)^m = \frac{t^m}{n^m}$,
singuliere breuken	$\frac{1}{0} = \pm\infty$ oneindig,
	$\frac{0}{0} = ?$ onbepaald.

Machten

Een **macht** is de schrijfwijze van een reëel getal onder de vorm g^m. In g^m is g het **grondtal** en m de **exponent**. Een tegengestelde macht van g^m definiëren we als $-g^m$ en een omgekeerde macht wordt genoteerd als $\frac{1}{g^m} = g^{-m}$, met $g \neq 0$.

Afhankelijk van de waarde van de exponent hebben we een andere betekenis:

$$
\begin{aligned}
&g^3 = g \cdot g \cdot g && 3 \in \mathbb{N}, \\
&g^{-3} = \tfrac{1}{g^3} = \tfrac{1}{g \cdot g \cdot g} && -3 \in \mathbb{Z}, \\
&g^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{g} = w \Leftrightarrow w^3 = g && \tfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \\
&g^0 = 1 && g \neq 0.
\end{aligned}
$$

In de praktijk komen soms stappen voor, zoals:

$$
\begin{aligned}
&\text{product} && g^3 \cdot g^2 = g^{3+2} = g^5, \\
&\text{deling} && \tfrac{g^3}{g^2} = g^3 \cdot g^{-2} = g^{3-2} = g^1, \\
&\text{macht} && \left(g^3\right)^2 = g^{3 \cdot 2} = g^6.
\end{aligned}
$$

We wijzen erop dat het een goed idee is machtsworteltekens te herschrijven in de moderne notatie en uitdrukkingen zoals $\sqrt[7]{g^3}$ te herschrijven als een macht met grondtal g en exponent $\frac{3}{7}$, dus $g^{\frac{3}{7}}$. We merken bovendien op dat de vierkantswortel op zich altijd een positief getal is, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^+$.

Zowel de betekenis van de exponenten, als de rekenregels zijn vereist om succesvol met machten om te gaan. Verder is het handig de kwadraten in het gehele interval $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$ en derdemachten in het interval $1^3 = 1$, $2^3 = 8, \ldots$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ te (her)kennen.

Onthou dat de enige uitweg uit een macht, de inverse macht is. Hiertoe gebruiken we dus links én rechts (zoals we bij vergelijkingen, zie paragraaf 1.2, doen) de omgekeerde exponent.

Voorbeeld: bepaal x als we weten dat $\sqrt[7]{x^3} = 5$. We passen de rekenregel toe waarbij een macht van een macht herleid wordt tot één macht met product van exponenten.

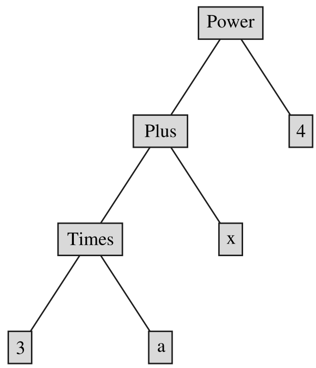
$$(x)^{\frac{3}{7}} = 5 \Longleftrightarrow \left((x)^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{7}{3}} = (5)^{\frac{7}{3}} \Longleftrightarrow x \approx 42,7494.$$

We stellen vast dat enkel met deze strategie het gezochte grondtal x bevrijd raakt vanonder zijn exponent en kan afgelezen worden als uitdrukking of desgewenst numeriek benaderd.

Wiskundige uitdrukkingen

Vooral samengestelde wiskundige uitdrukkingen kunnen nogal intimiderend overkomen of ronduit leesdrempels veroorzaken. Om een uitdrukking vlot te doorzien, wijzen we alvast op het bestaan van geïndexeerde variabelen. Geïndexeerde variabelen definiëren we als letters voorzien van een benedenindex om ze af te tellen, zoals: $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{99999}, x_{100000}, \ldots$, en $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ enz. Industriële toepassingen die duizenden variabelen vereisen, zijn namelijk verre van uitzonderlijk, daar waar ons alfabet 26 letters telt.

Eindige uitdrukkingen definiëren we als een samenstelling van operatoren (bewerkingen) op objecten (getallen, variabelen of structuren). We doorgronden bijvoorbeeld een uitdrukking $(3a+x)^4$ door het schetsen van zijn **boomvorm**. In ons voorbeeld betreft het een macht (Power) met exponent 4 van grondtal een som (Plus), enzovoort.



We evalueren hier even onze uitdrukking $(3a+x)^4$. Stellen we $a = 1$, dan resulteert dit in een gedeeltelijk 'inklappen' tot de eenvoudiger expressie $(3+x)^4$. Stellen we vervolgens ook nog $x = 2$, dan verkrijgen we de corresponderende getalwaarde $(3+2)^4 = 5^4 = 625$ als resultaat.

Werken we deze 4$^{\text{de}}$ macht uit tot de **som-vorm** $81a^4 + 108a^3x + 54a^2x^2 + 12ax^3 + x^4$, dan herschreven we de **product-vorm** $(3a+x)^4$ slechts naar een andere *gedaante*.

Deze expressie, die geen relatie is, proberen op te lossen is echter onzinnig. Enkel en alleen ongelijkheden, vergelijkingen of stelsels daarvan kunnen worden opgelost.

Relaties

We nemen hier ook de relationele uitdrukkingen heel beknopt onder de loep.

Een **ongelijkheid** definiëren we als een *veranderlijke* afweging waarin een linkerlid vergeleken wordt met een rechterlid door hetzij de 'is-(strikt)-kleiner-dan', hetzij de 'is-(strikt)-groter-dan' relationele operator. Bij wijze van voorbeeld hiervan noteren we $(3a+x)^4 \leqslant (b+4)(x+3)$ in de onbekenden *a, x, b*. Ongelijkheden kunnen eventueel worden opgelost naar een onbekende a, x of b.

Een **vergelijking** definiëren we als een *veranderlijke* afweging waarin een linkerlid vergeleken wordt met een rechterlid door de 'is-gelijk-aan' relationele operator. De uitdrukking $(3a+x)^4 = (b+4)(x+3)$ is een vergelijking in de onbekenden *a, x, b*. Ook vergelijkingen kunnen eventueel worden opgelost naar een onbekende a, x of b.

Een **identiteit** (of gelijkheid) definiëren we als een uitspraak die constant *waar* is, bijvoorbeeld 7 = 7. Een **contradictie** (of tegenstrijdigheid) definiëren we als een uitspraak die constant *onwaar* is, bijvoorbeeld $-10 > 5$.

Reële veeltermen

Op deze plaats gaan we even in op de rekenomgeving van de reële veeltermen in de variabele x; een verzameling die we noteren als $\mathbb{R}_{[x]}$.

▷ Eentermen

Een **eenterm** in x definiëren we als een uitdrukking ax^n, met a een getal en $n \in \mathbb{N}$. Bij uitbreiding kan deze lettervorm ook bestaan uit een aantal variabelen $x, y, z, \ldots$. Bijvoorbeeld $3(xy)^6$ en $3(x^2y^3z^6)$ zijn eentermen in respectievelijk xy en $x^2y^3z^6$.

De **graad** van een eenterm ax^n definiëren we als de natuurlijke exponent $n \in \mathbb{N}$ van de beoogde variabele x. Op deze manier onderscheiden we constante, lineaire, kwadratische, kubische of hogere graads eentermen. Constante eentermen zijn van graad 0, lineaire eentermen hebben graad 1, kwadratische graad 2 en kubische graad 3.

Nemen we als voorbeeld de reële eenterm $-\sqrt{12}x^6$, dan is de graad hiervan 6. Analoog is $3(xy)^6$ een eenterm in xy van graad 6, en is $3(x^2y^3z^6)^9$ een eenterm in $x^2y^3z^6$ van graad 9.

Gelijksoortige eentermen definiëren we als eentermen met identiek lettergedeelte. Zo zijn bijvoorbeeld de reële eentermen $\frac{5}{7}x^6$ en $-\sqrt{12}x^6$ gelijksoortig en ook $\frac{5}{7}x^3y^5z^2$ en $-\sqrt{12}x^3y^5z^2$ zijn gelijksoortig.

Alle (hoofd)bewerkingen op eentermen zijn uitvoerbaar als onmiddellijke toepassing van de rekenregels voor breuken en machten.

▷ Veeltermen

Een **veelterm** $V(x)$ definiëren we als een som van ongelijksoortige eentermen. De **graad** van een veelterm $V(x)$ definiëren we als de maximum exponent $m \in \mathbb{N}$ van de beoogde variabele x. Nemen we als voorbeeld de reële veelterm

$$V(x) = 17x^2 + \frac{1}{4}x^3 + 6x - 7x^2 - \sqrt{12}x^6 - 13x - 1,$$

dan is de graad van $V(x)$ gelijk aan de maximum exponent 6.

Herleiden of vereenvoudigen van veeltermen is mogelijk als gelijksoortige eentermen ervan bijeen kunnen genomen worden. We vereenvoudigen even ons voorbeeld hiervoor tot de vorm $V(x) = 10x^2 + \frac{1}{4}x^3 - 7x - \sqrt{12}x^6 - 1$.

Eenzelfde veelterm kunnen we in op- of aflopende machten van x rangschikken. Rangschikken we $V(x)$ naar oplopende machten van x, dan komt er $V(x) = -1 - 7x + 10x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \sqrt{12}x^6$. Rangschikken we $V(x)$ naar aflopende machten van x, dan noteren we $V(x) = -\sqrt{12}x^6 + \frac{1}{4}x^3 + 10x^2 - 7x - 1$.

Uiteraard kunnen we veeltermen ook als expressie evalueren tot een getalwaarde. Bepalen we bijvoorbeeld de getalwaarde van $V(x)$ in $x=-1$, dan komt er $V(-1) = -\sqrt{12}(-1)^6 + \frac{1}{4}(-1)^3 + 10(-1)^2 - 7(-1) - 1 = -\sqrt{12} - \frac{1}{4} + 16 = \frac{63}{4} - 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}$.

▷ Hoofdbewerkingen

Som van twee gelijksoortige eentermen: we tellen de coëfficiënten op en behouden het lettergedeelte

$$5a^2 - 3a^2 = (5-3)a^2 = 2a^2.$$

Product van eentermen: we vermenigvuldigen de coëfficiënten en de lettergedeelten elk apart

$$-5ab \cdot \frac{7}{4}a^2b^3 = -5 \cdot \frac{7}{4} \cdot a^{1+2}b^{1+3} = \frac{-35}{4}a^3b^4.$$

Quotiënt van eentermen: we delen de coëfficiënten door elkaar en we delen de lettergedeelten

$$\frac{-8a^6b^4}{-4a^4} = \frac{-8}{-4}\,a^{6-4}b^{4-0} = 2a^2b^4.$$

Macht van een eenterm: we verheffen elke factor van de eenterm tot de macht

$$\big(-2a^2b^4\big)^3 = (-2)^3(a^2)^3(b^4)^3 = -8a^6b^{12}.$$

Optellen of aftrekken van veeltermen: we tellen de termen van de tweede veelterm op bij de eerste of we trekken de termen van de tweede af van de eerste veelterm

$$(x^2-4x+8) - (2x^2-3x-1) = x^2-4x+8-2x^2+3x+1 = -x^2-x+9.$$

Product van veeltermen: we vermenigvuldigen elke term van de ene veelterm met elke term van de andere veelterm en tellen de verkregen producten op

$$\begin{aligned}(2x^2+3y)\cdot(4x^2-y) &= 2x^2(4x^2-y) + 3y(4x^2-y)\\ &= 2x^2\cdot 4x^2 + 2x^2\cdot(-y) + 3y\cdot 4x^2\\ &\qquad + 3y\cdot(-y)\\ &= 8x^4 - 2x^2y + 12x^2y - 3y^2\\ &= 8x^4 + 10x^2y - 3y^2.\end{aligned}$$

1.2 Vergelijkingen met één onbekende

Vooraf nemen we even wat woordenschat door omtrent het oplossen van vergelijkingen met één onbekende. Een **oplossing** is een waarde voor de onbekende waardoor na invulling de vergelijking een *gelijkheid* (of dus *waar*) wordt. Een **referentieverzameling** is de wiskundige getallenverzameling waarbinnen we een (eventuele) oplossing zoeken. Meestal is dit de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$. De **oplossingenverzameling** is de verzameling van alle mogelijke oplossingen van een vergelijking. De oplossingenverzameling is een deelverzameling van de vooropgestelde referentieverzameling.

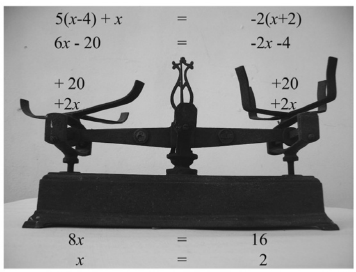
Lineaire vergelijkingen

Een **lineaire vergelijking** is een algebraïsche **eerstegraadsvergelijking**, dus waarin de onbekende maximum tot de macht één voorkomt. Na herleiding kunnen we de vergelijking altijd schrijven als

$$ax+b=0, \tag{1.1}$$

met $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en $b \in \mathbb{R}$. Zo zijn $3x+7=22, 5x-9d=c$ en $5(x-4)+x=-2(x+2)$ voorbeelden van lineaire vergelijkingen en $3x^2+7=22$ en $5ab-9b=c$ tegenvoorbeelden. De term 'lineair' is ontleend aan het Latijnse 'linea', wat rechte (lijn) betekent en slaat op de grafiek van een eerstegraadsfunctie (zie hoofdstuk 4).

Een lineaire vergelijking naar haar onbekende(n) oplossen is de eerstegraadsvergelijking legaal herschrijven totdat de verscholen oplossing expliciet afleesbaar wordt.



'Een vergelijking is als een weegschaal' is de beste geheugensteun om te blijven begrijpen hoe vergelijkingen correct herschreven worden. Onthou namelijk dat bij elke rekenstap de weegschaal in balans moet blijven, anders is die rekenstap illegaal. Wordt in de linkerschaal iets bijgelegd (of weggenomen), dan moet hetzelfde bedrag in de rechterschaal bijgeteld (of afgetrokken) worden, anders is de weegschaal uit balans. Wordt de linkerschaal vermenigvuldigd (of gedeeld) dan moet dezelfde factor de rechterschaal vermenigvuldigen (of delen), anders is de weegschaal uit balans. Dankzij deze metafoor moeten geen 'schrapwetten' gememoriseerd worden.

Waarom we een bepaalde herschrijfstap zouden zetten, hangt af van het beoogde doel: dit noemen we *strategie*. Zo vereist het oplossen naar verschillende veranderlijken uiteraard verschillende herschrijfstappen.

Voorbeeld: We lossen de vergelijking $5(x-4)+x=-2(x+2)$ op. We werken eerst de haakjes uit: $5x-20+x=-2x-4$. Daarna brengen we alle termen die een onbekende bevatten naar het ene lid, de andere termen naar het andere lid zodat $5x+x+2x=-4+20$. We vereenvoudigen beide leden tot $8x=16$. Nu kunnen we x uitrekenen: $x=2$.

Kwadratische vergelijkingen

Het omgaan met kwadratische uitdrukkingen en oplossen van kwadratische vergelijkingen zijn dankbare basisvaardigheden voor tal van multimediale en technologische onderwerpen.

- ▷ Uitwerken van producten

  Het uitwerken van een product definiëren we als het (herhaaldelijk) toepassen van distributiviteit tot de (veelterm)expressie in zuivere *som*-vorm staat. Voor een goed begrip, de veelterm blijft heel de tijd bewaard, enkel de gedaante ervan wijzigt van een product naar een som-vorm. We illustreren dit inzicht aan de hand van de veelterm $V(x)=(2x-3)(4-x)$.

  $$\begin{aligned}(2x-3)(4-x) &= (2x-3)\cdot 4+(2x-3)\cdot(-x)\\ &= (8x-12)+(-2x^2+3x)\\ &= -2x^2+11x-12\end{aligned}$$

  Andere voorbeelden zijn

  $$5a(2a^2-3b)=5a\cdot 2a^2-5a\cdot 3b=10a^3-15ab$$

  en

  $$\begin{aligned}4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{13}{2}\right) &= (4x-2)\left(x+\frac{13}{2}\right)\\ &= (4x-2)\cdot x+(4x-2)\cdot\frac{13}{2}\\ &= 4x^2-2x+26x-13=4x^2+24x-13.\end{aligned}$$

- ▷ Factoriseren van veeltermen

  Factoriseren definiëren we als het herschrijven van een (veelterm)expressie tot een zuiver product van (zoveel mogelijk) factoren. Ook blijft bij factoriseren de veelterm bewaard, enkel de gedaante ervan wijzigt naar een productgedaante. Onze illustratieve veelterm $V(x)=-2x^2+11x-12$ verandert enkel van gedaante naar de product-vorm $V(x)=(2x-3)(4-x)$ onder dergelijke herschrijving. We leren hieruit dat het product $(2x-3)(4-x)$ een factorisering is van de drieterm $-2x^2+11x-12$.