Ivo De Pauw en Bieke Masselis

Wiskunde voor IT

LANNOO CAMPUS

Derde herziene druk: juni 2014
Tweede herziene druk: juni 2012
Eerste druk: maart 2010

Foto's: Hoofdstuk 1, David Ritter; Hoofdstuk 2, Wouter Tansens; Hoofdstuk 3, Daryl Beggs, Juan Pablo Arancibia Medina; Hoofdstuk 4, Sofie Eeckeman; Hoofdstuk 5, Filip Joos; Hoofdstuk 6, Wouter Tansens, Sofie Eeckeman; Hoofdstuk 7, Wouter Tansens; Hoofdstuk 8, Wouter Tansens; Hoofdstuk 9, Sofie Eeckeman; Hoofdstuk 10, Wouter Verweirder; Hoofdstuk 11, Wouter Tansens; Hoofdstuk 12, Wouter Tansens, Sofie Eeckeman; Hoofdstuk 13, Brecht Wyseur; Hoofdstuk 14, Wouter Tansens; Hoofdstuk 15, Wouter Tansens, Sofie Eeckeman; Hoofdstuk 16, Wouter Tansens, Sofie Eeckeman; p.27, 71, 73, Bieke Masselis; p.82, 353, Wouter Verweirder; p.341, Anneleen Tansens.

D/2014/45/465 – ISBN 978 94 014 2100 3 – NUR 918

Vormgeving cover en binnenwerk: Jurgen Leemans
Omslagontwerp: Jan Middendorp, in samenwerking met Ellen Deketele

Uitgeverij LannooCampus maakt deel uit van Lannoo Uitgeverij,
de boeken- en multimediadivisie van Uitgeverij Lannoo nv.

Uitgeverij LannooCampus
Erasme Ruelensvest 179 bus 101
3001 Leuven
België
www.lannoocampus.be

Dit boek is opgedragen aan Joke Ceuppens (1977-2006)

“Ze kijkt naar mij, ze ziet me niet: het sneeuwt soms in haar hoofd. Ze zegt me dat ze vlinders ruiken kan, kan ik dat ook?”
Lieven Tavernier (Niet voorbij, oktober 2004)

Inhoud

Dankwoord

Volgende mensen bleken van onmisbaar tot onschatbaar bij het maken van dit boek en worden door ons uitdrukkelijk bedankt: Prof. Dr. Leo Storme, Olga Coutrin, Wouter Tansens, Wouter Verweirder, Hilde De Maesschalck, Ellen Deketele, Conny Meuris, Hans Ameel, Tom Decavele, Johan De Gelas, Dr. Rolf Mertig, Dick Verkerck, ir. Gose Fischer, Dr. Tom Wickham-Jones, Prof. Dr. Fred Simons, Dr. Luc Gheysens, Johan Beke, ir. MBA Jan Devos, Marijn Verspecht, ir. Wouter Gevaert, Dr. Philippe Bocher, Tina Defloo, Bart Grimonprez, ir. Sarah Rommens, Wauter Leenknecht, Prof. Dr. Vincent Rijmen, Dr. Joan Daemen, Sofie Eeckeman, Peter Saerens, Mercè Aicart, Jurgen Leemans, Jan Middendorp, Hilde Vanmechelen, Leen Wouters, Jef De Langhe, Wannes Van Wichelen, Eric Van Remortel, Ann Deraedt, Rita Vanmeirhaeghe, Roel Vandommele, ir. Lode De Geyter, Bart Leenknegt, Pascal Voet, Jill Vandendriessche, Dieter Roobrouck, Nicolaas Bijvoet, dr. ir. Frederik Vercauteren, Jef Daels, Anne-Mieke Vandenbulcke, alle multimediale Howestcollega's en iedereen die we even waren vergeten!

Hoofdstuk 1 · Instapwiskunde

Dit hoofdstuk omvat de onmisbare lees- en rekenvaardigheden voor het verder bestuderen van technologische onderwerpen in hun rekenomgeving.

De opeenvolgende paragrafen van dit hoofdstuk stippen met dit oogmerk stapsgewijze aspecten van de 'wiskundige taal' aan die wordt gesproken op allerlei toepassingsniveaus.

1.1 Letterrekenen

Reële getallen

We noteren de verzameling van alle:

- natuurlijke getallen (unsigned integers) als $\mathbb{N}$,
- gehele getallen (integers) als $\mathbb{Z}$,
- rationale getallen of breuken als $\mathbb{Q}$,
- reële getallen (floats of reals) als $\mathbb{R}$.

Deze getallenverzamelingen zijn als volgt genest: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

We vervolgen met wat terminologie, waar vaak verwarring over bestaat, zodat we dezelfde taal spreken. We wijzen erop dat het correct verwoorden ervan een weerspiegeling is van correct denkwerk.

Verzamelingen

- **Deelverzamelingen** worden altijd tussen accolades genoteerd, bijvoorbeeld de **ledige verzameling** noteren we als $\{\}$.
- Een **singleton** definiëren we als een verzameling met juist één element. We geven $\{5\}$ als voorbeeld van een singleton. Dit is een deelverzameling van de verzameling van de natuurlijke getallen, $\{5\} \subset \mathbb{N}$.
- Een **paar** definiëren we als een verzameling met juist twee elementen. De verzameling van de Booleaanse waarheidswaarden vormt bijvoorbeeld een paar $\{$*waar*, *onwaar*$\}$, kortweg te noteren als $\mathbb{B}$. Geven we anderzijds $\{115, -4\}$ als voorbeeld, dan is dit paar een deelverzameling van de verzameling van de gehele getallen of in symbolen $\{115, -4\} \subset \mathbb{Z}$.
- Deelverzamelingen zoals $\mathbb{Z}^-$ definiëren we als $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ of de verzameling van enkel de negatieve gehele getallen. We noteren $-1234 \in \mathbb{Z}^-$ als we benadrukken dat het negatief getal -1234 een **element** is van $\mathbb{Z}^-$.

- Als we elementen uit een verzameling wegnemen, doen we dat met de **verschilbewerking** voor verzamelingen, die genoteerd wordt als 'backslash'. Zo noteren we bij wijze van illustratie hiervan de verzameling van de natuurlijke getallen zonder nul als $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, de verzameling van alle breuken uitgezonderd de gehele getallen als $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ en de verzameling van alle reële getallen uitgezonderd nul en één als $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Hoofdbewerkingen

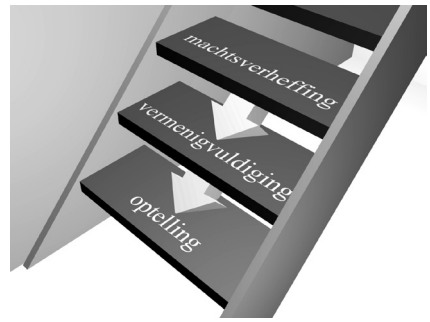
operatie	voorbeeld	getal a heet	getal b heet	uitkomst c heet
optelling	$a+b=c$	term	term	som
aftrekking	$a-b=c$	term of aftrektal	term of aftrekker	verschil
vermenigvuldiging	$a \cdot b = c$	factor	factor	product
deling	$\frac{a}{b}=c, b \neq 0$	deeltal of teller	deler of noemer	quotiënt
machtsverheffing	$a^b = c$	grondtal	exponent	macht
worteltrekking	$\sqrt[b]{a} = c$	grondtal	wortelexponent	wortel

Het **tegengestelde** van een reëel getal r noteren we als $-r$ en definiëren we als $r+(-r)=0$. Het **invers** of **omgekeerde** van een reëel getal r noteren we als $\frac{1}{r}$, ofwel r^{-1} en definiëren we als $r \cdot r^{-1} = 1$. Aftrekken definiëren we als het optellen met het tegengestelde: $a-b=a+(-b)$. Delen definiëren we als het vermenigvuldigen met het omgekeerde: $a:b=a \cdot b^{-1}$.

Wanneer bewerkingen elkaar ontmoeten, zijn we gehouden aan rekenregels. We herhalen hiertoe alle essentiële rekenregels in een notendop. Er geldt een vaste volgorde voor het uitvoeren van bewerkingen in $\mathbb{R}$, dat gememoriseerd kan worden met de volgende zin 'Het Mannetje won Van De Oude Aap'.

- Eerst alles uitrekenen tussen de haakjes,
- daarna alle machten (een vierkantswortel is ook een macht),
- dan alle vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts,
- ten slotte de optellingen en aftrekkingen van links naar rechts.

Er geldt ook **distributiviteit** in $\mathbb{R}$. Distributiviteit definiëren we als de verdeel-eigenschap van een 'hogere' bewerking over een 'lagere' bewerking. Distributiviteit vereist dus twee *verschillende* bewerkingen.



Zo noteren we distributiviteit van *machtsverheffen* over *vermenigvuldigen* bijvoorbeeld als $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$. Eveneens noteren we de distributiviteit van *vermenigvuldigen* over *optellen* als $3 \cdot (a+b) = 3 \cdot a + 3 \cdot b$.

We hoeden ons ervoor tegen deze 'trap van distributiviteit' fouten te maken, daar in het algemeen geldt:

$$(a+b)^3 \neq a^3 + b^3,$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \neq x + y.$$

Breuken

Een **breuk** is de schrijfwijze van een rationaal getal onder de vorm $\frac{t}{n}$ met $t, n \in \mathbb{N}$ en $n \neq 0$. In $\frac{t}{n}$ is t de **teller** en n de **noemer**. De omgekeerde breuk van $\frac{t}{n}$ met $t, n \neq 0$ definiëren we als $\frac{1}{\frac{t}{n}} = \frac{n}{t}$, ofwel $\left(\frac{t}{n}\right)^{-1}$. De tegengestelde breuk is dan gelijk aan $-\frac{t}{n} = \frac{-t}{n} = \frac{t}{-n}$. De rekenregels voor breuken kunnen we als volgt samenvatten:

som	$\frac{t}{n} + \frac{a}{b} = \frac{t \cdot b + n \cdot a}{n \cdot b}$,
verschil	$\frac{t}{n} - \frac{a}{b} = \frac{t \cdot b - n \cdot a}{n \cdot b}$,
product	$\frac{t}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{t \cdot a}{n \cdot b}$,
deling	$\frac{\frac{t}{n}}{\frac{a}{b}} = \frac{t}{n} \cdot \frac{b}{a}$,
machtsverheffing	$\left(\frac{t}{n}\right)^m = \frac{t^m}{n^m}$,
singuliere breuken	$\frac{1}{0} = \pm\infty$ limietgeval,
	$\frac{0}{0} =?$ onbepaald.

Machten

Een **macht** is de schrijfwijze van een reëel getal onder de vorm g^m. In g^m is g het **grondtal** en m de **exponent**. Een tegengestelde macht van g^m definiëren we als $-g^m$ en een omgekeerde macht wordt genoteerd als $\frac{1}{g^m} = g^{-m}$, met $g \neq 0$.

Afhankelijk van de waarde van de exponent hebben we een andere betekenis:

$$\begin{aligned} &g^3 = g \cdot g \cdot g && 3 \in \mathbb{N}, \\ &g^{-3} = \tfrac{1}{g^3} = \tfrac{1}{g \cdot g \cdot g} && -3 \in \mathbb{Z}, \\ &g^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{g} = w \Leftrightarrow w^3 = g && \tfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \\ &g^0 = 1 && g \neq 0. \end{aligned}$$

In de praktijk komen soms stappen voor, zoals:

$$\begin{aligned} &\text{product} && g^3 \cdot g^2 = g^{3+2} = g^5, \\ &\text{deling} && \tfrac{g^3}{g^2} = g^3 \cdot g^{-2} = g^{3-2} = g^1, \\ &\text{macht} && \left(g^3\right)^2 = g^{3 \cdot 2} = g^6. \end{aligned}$$

We wijzen erop dat het een goed idee is machtswortelteken te herschrijven in de moderne notatie en uitdrukkingen zoals $\sqrt[7]{g^3}$ te herschrijven als een macht met grondtal g en exponent $\frac{3}{7}$, dus $g^{\frac{3}{7}}$. We merken bovendien op dat de vierkantswortel op zich altijd een positief getal is, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^+$.

Zowel de betekenis van de exponenten, als de rekenregels zijn vereist om succesvol met machten om te gaan. Verder is het handig de kwadraten in het gehele interval $1^2 = 1$, $2^2 = 4$,..., $15^2 = 225$, $16^2 = 256$ en derdemachten in het interval $1^3 = 1$, $2^3 = 8$,..., $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ te (her)kennen.

Onthoud dat de enige manier om een macht op te heffen, de inverse machtsverheffing is. Hiertoe gebruiken we dus links én rechts (zoals we bij vergelijkingen, zie paragraaf 1.2, doen) de omgekeerde exponent.

Voorbeeld: bepaal x als we weten dat $\sqrt[7]{x^3} = 5$. We passen de rekenregel toe waarbij een macht van een macht herleid wordt tot één macht met product van exponenten.

$$(x)^{\frac{3}{7}} = 5 \Longleftrightarrow \left((x)^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{7}{3}} = x = (5)^{\frac{7}{3}} \approx 42,7494.$$

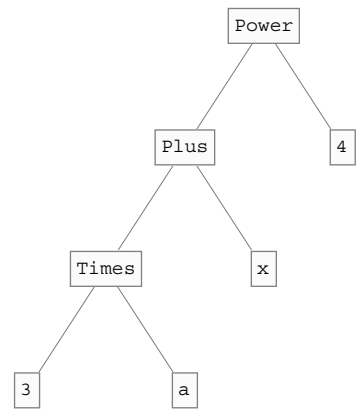
We stellen vast dat enkel met deze strategie het gezochte grondtal x bevrijd raakt vanonder zijn exponent en kan worden afgelezen als uitdrukking of desgewenst numeriek benaderd.

Wiskundige uitdrukkingen

Vooral samengestelde wiskundige uitdrukkingen kunnen nogal intimiderend overkomen of ronduit leesdrempels veroorzaken. Om een uitdrukking vlot te doorzien, wijzen we alvast op het bestaan van geïndexeerde variabelen. Geïndexeerde variabelen definiëren we als onbekenden voorzien van een benedenindex om ze af te tellen, zoals:

$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{99999}, x_{100000}, \ldots$, en $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ enz. Industriële toepassingen die duizenden variabelen vereisen, zijn namelijk verre van uitzonderlijk, daar waar ons alfabet 26 letters telt.

Eindige uitdrukkingen definiëren we als een samenstelling van operatoren (bewerkingen) op objecten (getallen, variabelen of structuren). We doorgronden bijvoorbeeld een uitdrukking $(3a+x)^4$ (indien nodig) door het schetsen van zijn **boom-vorm**. In ons voorbeeld betreft het een macht (Power) met exponent 4 van grondtal een som (Plus), enzovoort.



We evalueren hier even onze uitdrukking $(3a+x)^4$. Stellen we $a=1$, dan resulteert dit in een gedeeltelijk 'inklappen' tot de eenvoudiger expressie $(3+x)^4$. Stellen we vervolgens ook nog $x=2$, dan verkrijgen we de corresponderende getalwaarde $(3+2)^4 = 5^4 = 625$ als resultaat.

Werken we deze 4^{de} macht uit tot de **som-vorm** $81a^4 + 108a^3x + 54a^2x^2 + 12ax^3 + x^4$, dan herschreven we de **product-vorm** $(3a+x)^4$ slechts naar een andere *gedaante*.

Deze expressie, die geen relatie is, proberen op te lossen is echter onzinnig. Enkel en alleen ongelijkheden, vergelijkingen of stelsels daarvan kunnen worden opgelost.

Relaties

We nemen hier ook de relationele uitdrukkingen heel beknopt onder de loep.

Een **ongelijkheid** definiëren we als een *veranderlijke* afweging waarin een linkerlid vergeleken wordt met een rechterlid door hetzij het 'is-(strikt)-kleiner-dan', hetzij het 'is-(strikt)-groter-dan' teken. Bij wijze van voorbeeld hiervan noteren we $(3a+x)^4 \leqslant (b+4)(x+3)$ in de onbekenden *a, x, b*. Ongelijkheden kunnen eventueel worden opgelost naar een onbekende *a, x* of *b*.

Een **vergelijking** definiëren we als een *veranderlijke* afweging waarin een linkerlid vergeleken wordt met een rechterlid door het gelijkheidsteken. De uitdrukking $(3a+x)^4 = (b+4)(x+3)$ is een vergelijking in de onbekenden *a, x, b*. Ook vergelijkingen kunnen eventueel worden opgelost naar een onbekende *a, x* of *b*.

Een **identiteit** (of gelijkheid) definiëren we als een uitspraak die constant *waar* is, bijvoorbeeld $7=7$. Een **contradictie** (of tegenstrijdigheid) definiëren we als een uitspraak die constant *onwaar* is, bijvoorbeeld $-10 > 5$.

Reële veeltermen

Op deze plaats gaan we even in op de rekenomgeving van de reële veeltermen in de variabele x; een verzameling die we noteren als $\mathbb{R}_{[x]}$.

▷ Eentermen

Een **eenterm** in x definiëren we als een uitdrukking ax^n, met a een getal en $n \in \mathbb{N}$. Bij uitbreiding kan deze lettervorm ook bestaan uit een aantal variabelen $x, y, z, \ldots$. Bijvoorbeeld $3(xy)^6$ en $3(x^2y^3z^6)$ zijn eentermen in respectievelijk xy en $x^2y^3z^6$.

De **graad** van een eenterm ax^n definiëren we als de natuurlijke exponent $n \in \mathbb{N}$ van de beoogde variabele x. Op deze manier onderscheiden we constante, lineaire, kwadratische, kubische of hogere graads eentermen. Constante eentermen zijn van graad 0, lineaire eentermen hebben graad 1, kwadratische graad 2 en kubische graad 3.

Nemen we als voorbeeld de reële eenterm $-\sqrt{12}x^6$, dan is de graad hiervan 6. Analoog is $3(xy)^6$ een eenterm in xy van graad 6, en is $3(x^2y^3z^6)^9$ een eenterm in $x^2y^3z^6$ van graad 9.

Gelijksoortige eentermen definiëren we als eentermen met identiek lettergedeelte. Zo zijn bijvoorbeeld de reële eentermen $\frac{5}{7}x^6$ en $-\sqrt{12}x^6$ gelijksoortig en ook $\frac{5}{7}x^3y^5z^2$ en $-\sqrt{12}x^3y^5z^2$ zijn gelijksoortig.

Alle (hoofd)bewerkingen op eentermen zijn uitvoerbaar als onmiddellijke toepassing van de rekenregels voor breuken en machten.

▷ Veeltermen

Een **veelterm** $V(x)$ definiëren we als een som van ongelijksoortige eentermen. De **graad** van een veelterm $V(x)$ definiëren we als de maximum exponent $m \in \mathbb{N}$ van de beoogde variabele x. Nemen we als voorbeeld de reële veelterm

$$V(x) = 17x^2 + \frac{1}{4}x^3 + 6x - 7x^2 - \sqrt{12}x^6 - 13x - 1,$$

dan is de graad van $V(x)$ gelijk aan de maximum exponent 6.

Herleiden of vereenvoudigen van veeltermen is mogelijk daar waar gelijksoortige eentermen ervan bijeen kunnen worden genomen. We vereenvoudigen even ons voorbeeld hiervoor tot de vorm $V(x) = 10x^2 + \frac{1}{4}x^3 - 7x - \sqrt{12}x^6 - 1$.

Eenzelfde veelterm kunnen we in op- of aflopende machten van x rangschikken. Rangschikken we $V(x)$ naar oplopende machten van x, dan komt er $V(x) = -1 - 7x + 10x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \sqrt{12}x^6$. Rangschikken we $V(x)$ naar aflopende machten van x, dan noteren we $V(x) = -\sqrt{12}x^6 + \frac{1}{4}x^3 + 10x^2 - 7x - 1$.

Uiteraard kunnen we veeltermen ook als expressie evalueren tot een getalwaarde. Bepalen we bijvoorbeeld de getalwaarde van $V(x)$ in $x=-1$, dan komt er $V(-1)=-\sqrt{12}(-1)^6+\frac{1}{4}(-1)^3+10(-1)^2-7(-1)-1=-\sqrt{12}-\frac{1}{4}+16=\frac{63}{4}-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}$.

▷ Hoofdbewerkingen

Som van twee gelijksoortige eentermen: we tellen de coëfficiënten op en behouden het lettergedeelte

$$5a^2-3a^2=(5-3)a^2=2a^2.$$

Product van eentermen: we vermenigvuldigen de coëfficiënten en de lettergedeelten elk apart

$$-5ab\cdot\frac{7}{4}a^2b^3=-5\cdot\frac{7}{4}\cdot a^{1+2}b^{1+3}=\frac{-35}{4}a^3b^4.$$

Quotiënt van eentermen: we delen de coëfficiënten door elkaar en we delen de lettergedeelten

$$\frac{-8a^6b^4}{-4a^4}=\frac{-8}{-4}\,a^{6-4}b^{4-0}=2a^2b^4.$$

Macht van een eenterm: we verheffen elke factor van de eenterm tot de macht

$$\left(-2a^2b^4\right)^3=(-2)^3(a^2)^3(b^4)^3=-8a^6b^{12}.$$

Optellen en aftrekken van veeltermen: we tellen de termen van de tweede veelterm op bij de eerste of we trekken de termen van de tweede af van de eerste veelterm

$$(x^2-4x+8)-(2x^2-3x-1)=x^2-4x+8-2x^2+3x+1=-x^2-x+9.$$

Product van veeltermen: we vermenigvuldigen elke term van de ene veelterm met elke term van de andere veelterm en tellen de verkregen producten op

$$\begin{aligned}(2x^2+3y)\cdot(4x^2-y)&=2x^2(4x^2-y)+3y(4x^2-y)\\&=2x^2\cdot4x^2+2x^2\cdot(-y)+3y\cdot4x^2\\&\qquad+3y\cdot(-y)\\&=8x^4-2x^2y+12x^2y-3y^2\\&=8x^4+10x^2y-3y^2.\end{aligned}$$