

Voorwoord

‘Waarom moeten we dit leren?’ Zoals Gerardo schrijft, is dit een vraag die onherroepelijk een keer langskomt als je wiskundedocent bent. Dat gebeurde mij op de middelbare school waar ik gewerkt heb, maar ook op de tweedegraads lerarenopleiding waar ik nu nog steeds wiskunde geef (en waar Gerardo enige tijd mijn collega was). Vaak is die vraag gewoon een zucht uit onwil en recalcitrantie, maar het blijft een interessante, moeilijk te beantwoorden vraag. Een vraag die samenhangt met de vraag wat wiskunde eigenlijk *is*, en ook met de vraag wat we kinderen überhaupt willen leren.

Zelf vond ik wiskunde altijd leuk, ook wanneer ik niet direct kon zien waar het nuttig voor was. Maar wiskunde is niet het enige dat ik leuk vind: al sinds ik het kan, is mijn grootste hobby: lezen. Gewoon literatuur, autobiografische verhalen, kinderboeken, detectives; van alles wat. Verhalen geven een kijkje in de hoofden van andere mensen. In hoe andere mensen gebeurtenissen ervaren, in andere gezichtspunten, in minder florissante leefsituaties, in hoe mensen omgaan met de moeilijke of mooie, of juist heel gewone dingen van het leven. Literatuur laat je twijfelen aan je eigen opvattingen en wereldbeeld, en leert je empathie. En dat is precies wat we in de wiskunde te weinig zien: de menselijke kant van het verhaal.

Want die kant heeft wiskunde ook. Het gevoel van euforie dat je kunt ervaren als je opeens snapt hoe iets in elkaar zit. Dat je na lang ploeteren *eindelijk* op het juiste antwoord komt. Een ervaring van schoonheid, als je begrijpt hoe mooi alles in elkaar past en het inzicht waarom het *zó* is en, achteraf gezien, ook op geen enkele manier anders zou kunnen zijn.

Maar juist over dat geploeter en die ervaringen lees je als leerling nooit iets: in de schoolboeken staat de wiskunde als een logisch, afgerond geheel van waarheden en regeltjes. De wiskunde lijkt af te zijn, en als leerling moet je gewoon maar leren hoe het zit. Je moet je oplossingen precies opschrijven zoals je docent of het antwoordmodel het graag ziet, en liefst

ook bedenken op de manier waarop je het geleerd hebt. Dit is natuurlijk wel erg zwart-wit gesteld: ik ken ook veel docenten die leerlingen aanmoedigen zelf dingen te bedenken, creatief te zijn en daarvoor ook de voorwaarden weten te scheppen. Maar dit is wel het beeld dat veel mensen nog hebben van het vak.

Gelukkig komt daar langzaam wel verandering in, wat bijvoorbeeld te zien is aan de nadruk op wiskundige denkactiviteiten in de nieuwe lesprogramma's. Juist als docent speel je hier natuurlijk een belangrijke rol in. Het kan al helpen als een leraar af en toe zegt dat wiskunde gewoon voor iedereen wel eens moeilijk is! Zelfs de grootste beroepswiskundigen ploeteren en raken gefrustreerd. De kunst is om het te blijven proberen en vertrouwen te houden in jezelf.

Verhalen uit de geschiedenis van de wiskunde kunnen die menselijke kant van het vak goed laten zien. Als 'wiskundemeisje' heb ik ervaren dat veel mensen dergelijke verhalen graag lezen, ook als ze niets met wiskunde hebben.

Hoe Alan Turing de enigma kraakte (zijn levensverhaal is te zien in de film *The Imitation Game*), hoe de Babyloniërs en de Maya's rekenden in andere getalstelsels dan wij, dat de driehoek van Pascal al lang voor Pascal leefde, voorkwam in India, Iran en China, hoe Ludolph van Ceulen met de hand 35 decimalen van π uitrekende, dat Sophie Germain zich voordeed als man om maar wiskunde te kunnen leren: er zijn ontelbaar veel verhalen om de broodnodige culturele context te geven bij ons mooie vak.

Het verhaal van Andrew Wiles, die na jaren eenzaam ploeteren de laatste stelling van Fermat bewees, is wel een van de mooiste en beroemdste. In dit boek relateert Gerardo de wiskundige heldendaden van grootheden als Wiles en Alexander Grothendieck aan grote prestaties in andere takken van sport, letterlijk: aan die van voetbalvedette Maradona en die van schaakgrootmeester Bobby Fischer.

Juist die verhalen kunnen inspireren. Niet iedereen hoeft een wiskundige held te worden, maar iedereen zou moeten weten

dat wiskunde door mensen bedacht is, dat het vakgebied zich ontwikkelt in de tijd, beïnvloed wordt door culturele, politieke en sociale omstandigheden, en eigenlijk gewoon een deel van onze cultuur is, net zoals taal, kunst en literatuur. En precies daarvoor is dit boek een mooi beginpunt!

Jeanine Daems

Voormalig 'wiskundemeisje'

Bij het verstrijken van het tweede millennium loopt de wiskunde serieus gevaar. Van de factoren die haar overleven bedreigen, lijkt de vergaande onbekendheid met haar resultaten mij de meest bedreigende, evenals de wijdverbreide vijandigheid jegens haar vertegenwoordigers. Deze factoren worden nog bevorderd door de tegenzin van wiskundigen om zich buiten de nauwe grenzen van hun eigen discipline te begeven, en door hun onbekwaamheid haar esoterische inhoud te vertalen in slogans die begrijpelijk zijn voor oningewijden. Dit is echter juist dringend nodig in deze tijd van massacommunicatiemiddelen en public relations. Als er niet onmiddellijk drastische maatregelen getroffen worden, loopt de wiskunde gevaar spoedig een curiositeit te worden in de dieren tuin van bedreigde intellectuele soorten waar wij onze kinderen mee naartoe nemen naast andere 'klassieken' zoals poëzie, muziek, schilderkunst, en theater.

– Gian Carlo Rota, in: Piergiorgio Odifreddi,
Geschiedenis van de Wiskunde in de Twintigste Eeuw

There is surely no more reliable way to kill enthusiasm and interest in a subject than to make it a mandatory part of the school curriculum. Include it as a major component of standardized testing and you virtually guarantee that the education establishment will suck the life out of it. School boards do not understand what math is, neither do educators, textbook authors, publishing companies, and sadly, neither do most of our math teachers. The scope of the problem is so enormous, I hardly know where to begin.

– Paul Lockhart, *A Mathematician's Lament*

Inhoud

Wat is wiskunde?	13
Meesters van het spel Bobby Fisher vs. Alexander Grothendieck	37
Kunnen zuigelingen rekenen?	65
Wiskundigen mogen niet huilen of De hand van God	89
Meneer, waarom moeten we dit leren?	117
Dankwoord	141

Wat is wiskunde?

Written in five years, may it last as many thousands.

– Girolamo Cardano, *Ars Magna*, 1545

Inleiding

Wat is wiskunde? Dat is een relevante vraag, niet alleen voor diegene die zich voor het eerst in het onderwerp wil verdiepen, maar ook voor docenten wiskunde. Afhankelijk van wat hij of zij onder wiskunde verstaat, kan hij bepalen op welke wijze hij het vak wil onderwijzen. Of in de woorden van Reuben Hersh in zijn boek *What is mathematics, really?: 'What I think mathematics is affects how I present it.'* Veel docenten beschouwen het vak wiskunde als het toepassen en combineren van bepaalde regels, stellingen en theorieën. Zij hameren dan ook op het leren van die regels, stellingen en theorieën, en op het oefenen om te leren wanneer wat gebruikt moet worden. Prof. dr. Robbert Dijkgraaf, hoogleraar mathematische fysica aan de Universiteit van Amsterdam en winnaar van de prestigieuze Spinozapremie, het Nederlandse equivalent van de Nobelprijs, voor zijn wiskundige bijdragen aan de snaartheorie, zegt hierover: 'Soms vind ik het jammer dat wiskunde op de middelbare school wordt gegeven. Het geeft namelijk geen goed beeld van wat het vak echt inhoudt. Een wiskundige is absoluut niet geïnteresseerd in het toepassen van rekenregels als de abc-formule. Ik kan zo'n regel zelfs nauwelijks onthouden! Het is juist het verhaal achter de formule dat mij interesseert.'¹

Voor wiskundigen zelf is de vraag wellicht minder interessant. Wie als wiskundige werkt aan een universiteit, verbonden is aan een onderzoeksinstituut of zijn geld verdient in het bedrijfsleven,

¹ <http://www.uva.nl/onderwijs/bachelor/bacheloropleidingen/content/wiskunde/wiskunde.html>

hoeft niet stil te staan bij de vraag wat wiskunde eigenlijk is. Het is een filosofische vraag. Je kunt uitblinken in wiskunde, zonder ooit nagedacht te hebben over de filosofie van de wiskunde, zonder precies te weten wat wiskunde is. Natuurlijk zullen de meeste professionele wiskundigen wel een antwoord hebben op de vraag wat wiskunde volgens hen is of wat het voor hen betekent, maar het is de vraag of ze andere antwoorden voor mogelijk houden. Toch ben ik van mening dat het goed zou zijn om filosofie van de wiskunde op te nemen in het curriculum van het voortgezet onderwijs, omdat het een interessante, belangrijke aanvulling vormt op het wiskundeonderwijs.

De vraag wat wiskunde is, is geen eenvoudige vraag en er is dan ook geen eenduidig antwoord mogelijk. Tijdens mijn studie literatuurwetenschap werd een soortgelijke vraag gesteld: wat is literatuur? Het moge duidelijk zijn dat ook hier de grens tussen literatuur en overige werken geen statische is. Wat de één onder literatuur verstaat, is voor een ander geen literatuur. Het antwoord dat toen werd gegeven, was: literatuur is datgene wat verschillende mensen op verschillende plekken in verschillende tijden onder literatuur verstaan. Het is een onbevredigend antwoord, omdat hiermee niet duidelijk wordt afgebakend wat nu wel, en wat nu niet onder literatuur valt. Tegelijkertijd is het de vraag of er behoefte is aan zo'n afbakening. Een mogelijk antwoord voor wiskunde zou dan ook kunnen zijn: wiskunde is datgene wat verschillende mensen op verschillende plekken in verschillende tijden onder wiskunde verstaan.

Het is niet altijd even duidelijk wanneer we nu wiskunde bedrijven of natuurkunde, of wiskunde of economie, maar is dat werkelijk nodig? Wordt de wetenschap gehinderd door het feit dat we niet duidelijk kunnen aangeven wanneer het ene ophoudt en het andere begint? Nee, want het onderscheid tussen wiskunde en natuurkunde is een door de mens bedachte afbakening. In werkelijkheid vloeien de twee disciplines in elkaar over. Maar met dit antwoord, dat veel ruimte openlaat voor eigen invulling, wordt niet aangegeven wat de verschillende zienswijzen binnen de wiskunde zijn. Net zoals de geschiedenis

van de wiskunde ons leert dat er soms eeuwen voorbijgingen voordat een wiskundig concept ten volle werd begrepen, leert de filosofie van de wiskunde ons dat niet slechts één aanpak de juiste is, en verder dat in verschillende tijden de nadruk werd gelegd op verschillende aspecten binnen de wiskunde. Er zijn namelijk verschillende manieren om tegen het vak aan te kijken en er is sprake van een ontwikkeling. Wiskunde is dus minder statisch dan op het eerste gezicht lijkt.

Maar wat is wiskunde nu precies? Robbert Dijkgraaf zegt dat wiskunde meer een taal is dan een natuurwetenschap. 'Je zou wiskunde kunnen beschrijven als de studie van patronen in de meest algemene zin.'² De wiskunde die op de middelbare school wordt gegeven, is volgens hem zeer beperkt. Wat daar wordt voorgeschoteld, 'is slechts een klein deel van een uitgebreide wetenschap met vele toepassingen. In plaats van sommen oplossen volgens standaardrecepten, word je op de universiteit uitgedaagd te kijken naar de samenhang en structuur in de wereld achter getallen en formules.'³ Om een indruk te krijgen van de verschillende toepassingen van de wiskunde verwijs ik naar het boekje *Succesformules* van Bennie Mols en Ionica Smeets. Zij laten zien dat wiskunde gebruikt kan worden in verschillende disciplines, bijvoorbeeld in de geneeskunde, de misdaadbestrijding, de sport en in de kunst. Maar wiskunde wordt ook toegepast in onder meer klimaatmodellen, bij het modelleren van ziekteverspreiding, in de pensioen- en verzekeringswereld, in het bankwezen, in veilige internetcommunicatie en zelfs bij processen in lichaamscellen. Het is dan ook een bijzondere leemte dat we kinderen onderwijzen in de wiskunde zonder stil te staan bij de onuitputtelijke hoeveelheid toepassingen van het vakgebied. Al is het maar om, in plaats van eindeloos te hameren op het manipuleren van formules en eigenschappen ervan opdreunen, aan te tonen dat wiskunde erg veelzijdig is, dynamisch en dat

2 <http://www.uva.nl/onderwijs/bachelor/bacheloropleidingen/content/wiskunde/wiskunde.html>

3 Idem.

creativiteit een grote rol speelt. De Nederlandse wiskundige Lex Schrijver zei eens: 'Wiskunde is als zuurstof. Als het er is, merk je het niet. Als het er niet zou zijn, merk je dat je niet zonder kunt.' Het is onze taak om te laten zien dat zuurstof overal aanwezig is.

Het Nederlandse wikipedialemma 'wiskunde' leert ons dat Aristoteles wiskunde definieerde als 'de wetenschap van de hoeveelheid'. Deze definitie werd gebruikt tot de 18e eeuw. Vanaf toen ontwikkelde de wiskunde zich in sneltreinvaart en kon het niet meer begrepen worden als enkel de wetenschap van hoeveelheden. Volgens het lemma is wiskunde nu 'een formele wetenschap die onder andere getallen, patronen en structuren bestudeert. De wiskunde komt voort uit het rekenen en de meetkunde, maar omvat veel meer dan dat.' Het Engelse lemma zegt dat '*Mathematics is the abstract study of topics such as quantity (numbers), structure, space, and change. There is a range of views among mathematicians and philosophers as to the exact scope and definition of mathematics.*' Je zou ook kunnen zeggen dat wiskunde is wat wiskundigen doen.

Richard Feynman, Nobelprijswinnaar in de natuurkunde, haalt in *The pleasure of finding things out* een herinnering op aan zijn vader, die hem verschillende kleuren tegeltjes voorschotelt. Hij moet eerst een witte tegel neerleggen, dan twee blauwe, dan weer een witte en dan weer twee blauwe. Zijn vader vraagt hem dan welke kleur het volgende tegeltje moet hebben. De jonge Richard wil een blauwe neerleggen, maar zijn vader zegt dat het een witte moet zijn. Ook zijn moeder bemoeit zich ermee en zegt dat de kleine jongen best een blauwe mag neerleggen als hij dat wil. Maar zijn vader is resoluut en legt uit dat hij wil dat Richard oog krijgt voor patronen. Zijn argument is simpel, dat is namelijk de enige wiskunde die hij kan doen met zijn zoon op deze leeftijd. Feynman schrijft hierover: 'Als dit een lezing was over wat wiskunde is, dan zou ik het antwoord al hebben gegeven. Wiskunde is het zoeken naar patronen.'

Iedere wiskundige heeft een eigen kijk op wiskunde. Ik durf wel te beweren dat ook mijn visie slechts een beperkte is. Wiskunde is een te groot vakgebied om alles te kunnen overzien.

Daarom is dit hoofdstuk slechts een eerste aanzet. Bovendien wil ik proberen het betoog begrijpelijk te houden voor iemand die nauwelijks bekend is met het vakgebied.

Wat is wiskunde niet?

Reuben Hersh somt in zijn boek *What is mathematics, really?* een aantal mythen over wiskunde op. Zijn bedoeling is om enkele algemeen geaccepteerde uitspraken over wiskunde te ontkrachten. Volgens hem gaat het er niet om of een mythe waar of onwaar is, vaak is het waarheidsgehalte moeilijk te bepalen. Maar als bepaalde mythen algemeen worden geaccepteerd, kun je wel onderzoeken of dat gerechtvaardigd is of niet.

De eerste mythe is *eenheid*. Alleen in de wiskunde zou er eenheid bestaan, wiskunde als onscheidbaar geheel. Een van mijn vrienden studeerde tegelijkertijd met mij af, alleen niet in de algebra zoals ik, maar in de topologie, de tak van de wiskunde die eigenschappen van meetkundige figuren bestudeert bij vervormingen die de samenhang niet verbreken, zoals buigen, rekken en draaien. Toen hij zijn scriptie af had, probeerde ik de tekst te lezen. Ik moet bekennen dat ik reeds op de eerste pagina afhaakte. Ik was niet in staat zijn afstudeerwerk te lezen. Hij was zo vertrouwd geraakt met de beginselen uit zijn vakgebied dat hij deze niet uitlegde in zijn scriptie. Dat was precies de reden waarom ik er niets van begreep; de symbolen hadden voor mij geen enkele betekenis, en omdat ik niet wist wat sommige concepten inhielden, kon ik mij er ook geen voorstelling van maken. Er zijn overigens genoeg lezingen in mijn eigen vakgebied geweest waarbij ik de spreker ook al na enkele minuten niet meer kon volgen. En om de zaak nog gecompliceerder te maken – en dat is tegelijkertijd een argument vóór eenheid – heb ik ook collega-wiskundigen meegemaakt die een lezing in een totaal ander vakgebied dan waarin zij werkzaam waren, wél konden begrijpen, ondanks het feit dat hun kennis van dat gebied vrij minimaal was. Een mooi voorbeeld is dat van de Hongaarse

wiskundige Paul Erdős. Tijdens een bijeenkomst zag hij een stelling op het bord staan, waarvan net een bewijs was geleverd van dertig pagina's. Erdős, die niet thuis was in dat specifieke vakgebied, vroeg aan een collega wat bepaalde symbolen voorstelden. Binnen mum van tijd, nadenkend voor het bord met een krijtje in zijn hand, formuleerde hij een alternatief bewijs, van twee regels!

Een tweede mythe is *universaliteit*. Veel wiskundigen geloven dat de wiskunde die tot nu toe is ontwikkeld, de enige mogelijk wiskunde is. Dit impliceert dat als er ergens anders in het universum ook intelligent leven bestaat en dat als dat zich ook in de wiskunde heeft bekwaamd, er een mogelijkheid tot vergelijken bestaat. De mogelijkheid tot vergelijken zelf is volgens Hersh universeel. Omdat vergelijken communicatie vereist, betekent dat dat de mogelijkheid om te vergelijken afhangt van de vraag of het andere intelligente leven genoeg op ons lijkt om te kunnen communiceren. Er is nog een tweede moeilijkheid. Stel dat er ergens in het universum intelligent leven bestaat en stel dat dat ook wiskunde bedrijft, dan impliceert dat niet dat dit dezelfde wiskunde is als onze wiskunde. Het zou namelijk zomaar kunnen dat het op een punt is begonnen waar wij nog niet eens zijn aanbeland. Of het zou kunnen dat, net zoals er tussen twee punten op een lijn oneindig veel andere punten liggen, het nog altijd bezig is met Euclidische meetkunde maar veel meer relaties heeft gevonden dan wij voor mogelijk achten.

De derde mythe is *zekerheid*. We gaan er maar van uit dat zekerheid een belangrijk element is binnen de wiskunde. Heb je eenmaal een stelling bewezen, en is die gecontroleerd door anderen, dan is die stelling waar. Eenmaal bewezen, is het voor een ander onmogelijk om een tegenvoorbeeld van de stelling te geven, tenzij het bewijs een fout bevatte. Het tegenvoorbeeld geeft dan een nieuwe zekerheid. Maar hier lijkt, net als bij de eerste mythe, een onderscheid te bestaan tussen 'theorie' en 'praktijk'. Natuurlijk streven we in principe naar zekerheid, maar die is onmogelijk te bereiken in de praktijk. Sterker nog, in de praktijk vertrouwen we veel op anderen en op eerder behaalde

resultaten. Wanneer de eerste stappen van leren bewijzen zijn gemaakt, vragen leerlingen vaak: 'Maar moet ik de stelling die ik gebruikt heb, zelf ook niet bewijzen?' Het antwoord is nee, binnen de wiskunde moet je leren vertrouwen op anderen. De laatste stelling van Fermat is bewezen, omdat een handjevol mensen het bewijs hebben geaccepteerd omdat ze regel voor regel het bewijs zijn nagelopen en het als correct hebben beschouwd. Voor de overige 7 miljard mensen is de stelling van Fermat dus bewezen, en dus waar. En nieuwe resultaten binnen de getaltheorie kunnen nu worden gevonden dankzij deze vliesdunne zekerheid.

De laatste mythe is *objectiviteit*. Volgens Hersh is deze mythe de meest plausibele. Er bestaat onder wiskundigen over de hele wereld een duidelijke consensus over wat geaccepteerd wordt binnen de wiskundige gemeenschap en wat correct is. In het voortgezet onderwijs is het voortdurend aftasten wat correct en geaccepteerd is, en wat niet. Veel leerlingen gaan op een zeker moment de mist in, gebruiken verkeerde regels op het verkeerde moment en sommige leerlingen creëren eigen (vaak foutieve) regels. Later, tijdens de studie wiskunde en nog later, tijdens het promoveren wordt geleerd hoe bewijzen worden gefomuleerd, welke stappen kunnen worden overgeslagen en welke stappen juist niet mogen ontbreken. Er wordt geleerd hoe anderen te overtuigen zijn van jouw ideeën. Een analogie kan gemaakt worden met literatuur. Er zijn genoeg schrijfcursussen die je leren wat correct is en wat geaccepteerd. Maar dat wil niet zeggen dat iedereen die zo'n cursus heeft afgerond, in staat is een fantastische roman te schrijven. En wat is dat dan, een fantastische roman? In Nederland wordt er bij het vergeven van belangrijke literaire prijzen vaak geklaagd dat de genomineerden blanke, oude mannen zijn. Blijkbaar is dat wat zij doen interessant, belangrijk, diepzinnig of elegant. Hetzelfde geldt voor lijstjes met de beste boeken die ooit zijn verschenen. Hoeveel Afrikaanse auteurs staan daar bijvoorbeeld op? Is dat omdat ze minder belangrijk zijn, of minder diepzinnig, of minder goed schrijven? Nee, dat komt omdat deze criteria subjectief zijn. Dit geldt ook voor de wiskunde. Alhoewel er consensus bestaat over

wat goed is en wat binnen de wiskunde geaccepteerd wordt, is het net zo belangrijk om over de vier minder objectieve criteria te spreken: wat is binnen de wiskunde interessant, wat is belangrijk, wat is diepzinnig en wat is elegant?

Wiskunde is een kunst, de puurste kunst

Paul Lockhart houdt in *A Mathematician's Lament* een vurig pleidooi voor ander wiskundeonderwijs:

Why don't we want our children to learn to do mathematics? Is it that we don't trust them, that we think it's too hard? We seem to feel that they are capable of making arguments and coming to their own conclusions about Napoleon, why not about triangles? I think it's simply that we as a culture don't know what mathematics is. The impression we are given is of something very cold and highly technical, that no one could possibly understand—a self-fulfilling prophecy if there ever was one.

Wiskunde moet volgens Lockhart gezien worden als kunst. Waarom worden muzikanten, schilders, dichters en zelfs koks gezien als kunstenaars en wiskundigen niet? Dat is volgens hem toe te schrijven aan het feit dat in onze cultuur niemand precies weet wat wiskundigen doen. Muzikanten drukken zich uit in muziek, schilders in beelden, auteurs in woorden en koks produceren nieuwe combinaties van smaken. Maar wat doen wiskundigen? Iedereen weet wel dat wiskunde gerelateerd is aan andere wetenschappen, en dat wiskunde iets te maken heeft met computers, maar wat wiskunde nu precies inhoudt? Er bestaat volgens Lockhart veel onbegrip over wiskunde, en misschien is dat gerelateerd aan de quote van Gian-Carlo Rota aan het begin van het boek, dat wiskundigen niet goed zijn in het communiceren wat zij nu eigenlijk doen. Lockhart doet een poging ons te vertellen wat wiskunde behelst en zet hoog in: