JEANINE DAEMS
& IONICA SMEETS

IK WAS ALTIJD HEEL SLECHT IN WISKUNDE

REKEN MAAR OP DE WISKUNDEMEISJES

UITGEVERIJ NIEUWEZIJDS

Uitgegeven door: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam
Ontwerp omslag en binnenwerk: Studio Jan de Boer, Amsterdam

ISBN 978 90 5712 336 8
NUR 918

FSC www.fsc.org MIX Papier van verantwoorde herkomst FSC® C004472

Bij de productie van dit boek is gebruikgemaakt van papier dat het keurmerk van de Forest Stewardship Council (FSC) mag dragen. Bij dit papier is het zeker dat de productie niet tot bosvernietiging heeft geleid.

Inhoud

Woord vooraf

Als we vertellen dat we wiskundigen zijn, is de eerste reactie meestal: 'Ik was altijd heel slecht in wiskunde' – vaak gevolgd door de vraag of er niet heel weinig vrouwen zijn die wiskunde doen. Toen we in 2006 begonnen met een weblog over wiskunde, www.wiskundemeisjes.nl, verwachtten we dan ook niet veel meer lezers dan onze collega's en vrienden. Tot onze verbazing bleek echter een veel grotere groep geïnteresseerd in wiskunde, ook mensen die er vroeger heel slecht in waren.

Wiskunde is natuurlijk veel meer dan die vervelende sommen van de middelbare school. Het gaat om mensen die slimme dingen doen, om de smeuïge verhalen over die mensen en vooral om schoonheid van grote ideeën. We gebruiken twee criteria om te beslissen of we ergens over willen schrijven: het moet iets zijn wat je op een feestje aan je vrienden wilt vertellen en je moeder moet het kunnen begrijpen.

Dit boek staat vol met stukjes die hier – volgens ons – aan voldoen. Het bestaat uit acht hoofdstukken met elk een eigen thema. Dat thema kan een deelgebied zijn van de wiskunde (zoals kansrekenen of meetkunde), of een overkoepelend thema (zoals slimme ideeën). Omdat het allemaal losse stukjes zijn, hoef je dit boek niet van voor naar achter te lezen. Een enkele keer verwijzen we naar iets wat eerder is uitgelegd, maar de belangrijkste begrippen kun je opzoeken in de woordenlijst achterin. Je kunt dit boek het beste zien als een soort vakantieboek, waar je steeds uithaalt waar je op dat moment zin in hebt. Af en toe staan er in de marge pepertjes. Die geven aan dat die stukjes net iets pittiger zijn, en net een beetje dieper gaan dan de rest. Zeg maar de Madame Jeanettes onder de wiskunde, speciaal voor de fijnproever.

Er is een aantal vaste rubrieken, elk hoofdstuk heeft bijvoorbeeld een Doe Het Zelf waarbij je aan de slag kunt met fractals kleien of met miljoenen gedichten maken. In onze columns (die eerder verschenen in *de Volkskrant*) geven we onze persoonlijke kijk op wiskunde. In Vallende Sterren beschrijven we het leven van wiskundigen die op een opvallende manier om het leven zijn gekomen. Ook geven we tips voor wiskundige boeken, films, kleding en uitjes. Verder vind je in dit boek puzzels, historische feitjes en een hele reeks onopgeloste problemen.

We hebben geprobeerd om de verhalen die in elk populair wiskundeboek staan zo veel mogelijk te vermijden, al wilden we klassiekers als het vermoeden van Goldbach en de laatste stelling van Fermat niet onvermeld laten. Ten slotte willen we het Platform Bèta Techniek en het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden bedanken voor hun steun. En vooral veel dank aan de lezers van onze weblog, voor al hun tips en enthousiaste reacties!

We hopen dat je na het lezen van dit boek zegt: ‘Ik was altijd heel slecht in wiskunde. Maar wat jullie doen, snap ik wel. Wat een mooi vak is het eigenlijk!’

Veel plezier!

Ionica en Jeanine
(de wiskundemeisjes)

1 Getallenreeksen en behang patronen

We beginnen dit boek met waar wiskunde volgens ons over gaat: het herkennen van patronen, het ontdekken van regelmaat en het bewijzen dat die regelmaat inderdaad *altijd* optreedt. Zo'n patroon kan in getallen zitten, maar dat hoeft niet per se. Ook in figuren, veranderingen of gebeurtenissen kun je patronen ontdekken waar wiskundig iets interessants over te zeggen is.

Allereerst bespreken we patronen die je vast wel eens bent tegengekomen: getallenrijtjes die je in IQ-tests moet afmaken. Zijn dat eigenlijk wel goede opgaven?

Visuele regelmaat zie je in behangpatronen of in islamitische mozaïeken. Hoeveel verschillende behangpatronen zijn er? En wat betekent 'verschillend' precies?

In het dagelijks leven kom je ook regelmatig patronen tegen. Bijvoorbeeld als je lang moet wachten op de tram. Vaak zie je dan niet één tram aankomen, maar een aantal trams vlak achter elkaar. Hoe zit dat?

En is het echt het efficiëntst om sinaasappels op een regelmatige manier te stapelen? Het vermoeden van Kepler zegt van wel, maar 100% zeker is het nog niet. Net als het vermoeden van Collatz, over een simpel getallenpatroon, is het nog altijd niet bewezen!

Willekeurige getallenreeksen, zonder welke regelmaat dan ook, zijn heel moeilijk zelf te maken. Dat gegeven wordt gebruikt bij het opsporen van fraude: zelfbedachte getallen zijn minder willekeurig dan willekeurige getallen, en dus te herkennen.

In de rubriek Doe Het Zelf lees je hoe je je eigen fractals kunt kleien.

Getallenrijtjes

Je kent ze vast wel. De getallenrijtjes, een vast onderdeel van iedere IQ-test. Wat is het volgende getal in het rijtje 2, 4, 6, 8? En in het rijtje 1, 3, 6, 10? De rijtjes kunnen natuurlijk ook nog veel moeilijker zijn.

Maar voor wiskundigen die zo'n test doen, is er een complicerende factor: ze weten namelijk dat eigenlijk *elk* antwoord goed is! Hé, hoe zit dat? In het rijtje 2, 4, 6, 8, … ligt 10 toch wel erg voor de hand als volgend antwoord! Waarom zou ook een ander getal goed kunnen zijn?

Er is nog een andere oplossing: 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 zou ook een logisch vervolg kunnen zijn. Of 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, …: dan kijk je steeds naar het eindcijfer van het getal dat je krijgt door 2 op te tellen bij het vorige getal.

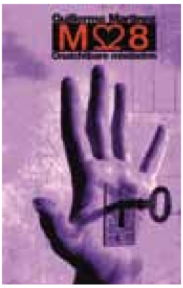
Nou kun je terecht zeggen: dat zijn flauwe voorbeelden. Maar er ligt een fundamenteel probleem aan ten grondslag. Je moet uit een paar getallen een patroon herkennen, en uit dat patroon weer afleiden wat de volgende getallen zijn. Het probleem is dat zo'n patroon nooit eenduidig kan worden vastgelegd door het geven van een eindig rijtje getallen.

Laten we eens naar het rijtje 1, 3, 6, 10 kijken. Het vervolg dat waarschijnlijk bedoeld wordt, is: 15, 21, 28, 36. De verschillen tussen de getallen in het rijtje zijn dan 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Maar dat is niet de enige mogelijkheid. Als je in de uitdrukking $\frac{1}{8}(- x^4 + 10\, x^3 - 31\, x^2 + 54\, x - 24)$ achtereenvolgens 1, 2, 3 en 4 invult voor x, krijg je ook 1, 3, 6 en 10. Als je verdergaat en 5, 6, 7 en 8 invult, krijg je: 1, 3, 6, 10, 12, 6, -17, -69. Dus is 12 ook een goed antwoord, net als 15. Sterker nog: voor *elk* getal dat je na 10 zou willen invullen, bestaat zo'n formule.

Een andere leuke manier om ditzelfde rijtje af te maken, gebruikt het gooien van drie dobbelstenen. Met drie dobbelstenen gooi je altijd minstens drie ogen. Hoeveel manieren zijn er om drie te gooien? Dat lukt alleen door 1 met de eerste, 1 met de tweede en 1 met de derde dobbelsteen te gooien, dus dat geeft één (1) mogelijkheid. Om vier ogen te gooien kun je 1, 1, 2 gooien, of 1, 2, 1, of 2, 1, 1. Dat zijn dus drie (3) mogelijkheden. Om vijf ogen te gooien zijn er, jawel, zes (6) mogelijkheden. En om zes ogen te gooien zijn er tien (10) mogelijkheden. Dus op deze manier krijgen we alweer het rijtje 1, 3, 6, 10, met als logisch vervolg het aantal mogelijkheden om zeven, acht, negen of tien ogen te gooien, en dan ziet het rijtje er als volgt uit: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27.

Dit alles betekent dat er bij zo'n IQ-test ook verwacht wordt dat je het 'eenvoudigste' patroon kunt kiezen als je er meer dan één ziet. En geef toe: kunnen inschatten wat andere mensen verwachten, is natuurlijk ook een teken van intelligentie.

Leestip Onzichtbare misdaden



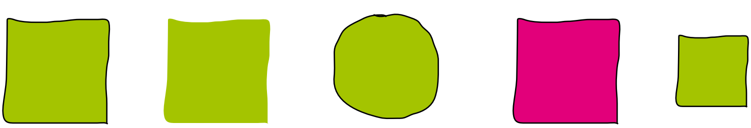
De Argentijnse schrijver Guillermo Martínez is gepromoveerd in de wiskunde, en in deze detective speelt wiskunde dan ook een belangrijke rol. Het verhaal speelt zich af in Oxford (een goede stad voor detectives!) en er vallen doden. Een Argentijnse student die een beurs heeft gekregen om na zijn afstuderen een jaar in Oxford verder te studeren (en stiekem van plan is om de algebraïsche topologie in te wisselen voor de logica), komt midden in het mysterie terecht.

De sterfgevallen zijn allemaal op het eerste gezicht niet zo heel verdacht. Maar wiskundeprofessor Seldom, die net een boek gepubliceerd heeft over logische rijen en daarin een hoofdstuk over seriemoorden heeft opgenomen, lijkt te worden uitgedaagd door de moordenaar: hij ontvangt brieven met symbolen erop. Wat zal het volgende symbool worden, en wat zegt dat over de volgende moord?

Guillermo Martínez, Onzichtbare misdaden.
Amsterdam: Vassalucci, 2004.

Puzzel Welke hoort er niet bij?

(De oplossing staat achter in dit boek.)



Doe Het Zelf: Fractals kleien

NODIG

- twee kleuren klei (bijvoorbeeld wit en blauw)
- een scherp mes

WERKWIJZE

1. Kneed vier even grote driehoekige balken: drie blauwe en één witte.

2. Stapel de balken op elkaar tot één grote driehoek. Snijd voorzichtig met een scherp mes de rommelige uiteinden van de balk.

3. Nu komt de moeilijkste stap: rek de balk langzaam uit zodat hij langer en dunner wordt en zorg ervoor dat hij steeds zijn patroon houdt. Ga door tot de balk drie keer zo lang is geworden en snijd hem dan in drie gelijke stukken.

4. Stapel de drie nieuwe balken op met in het midden een nieuwe witte balk.

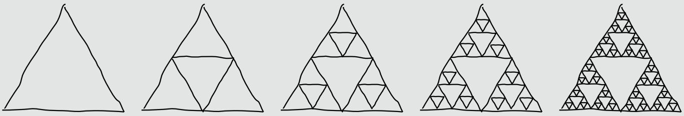
5. Herhaal stap drie en vier zo vaak als je wilt of kunt.

6. Snijd de balk in plakken en zie daar je mooie fractals! Je kunt er oorbellen van maken. Of je gebruikt koekjesdeeg en chocoladedeeg en bakt op deze manier fractalkoekjes.

WIE BEDACHT DEZE FRACTALS?

Als je stap drie en vier oneindig vaak herhaalt, krijg je de Sierpiński-driehoek. De Poolse wiskundige Wacław Sierpiński beschreef in 1915 deze naar hem genoemde fractal: een wiskundig patroon dat bij inzoomen steeds hetzelfde blijft. Hoe ver je ook inzoomt op de Sierpiński-driehoek, hij ziet er steeds hetzelfde uit. Deze zelfgelijkvormigheid is kenmerkend voor fractals.



Kustlijnen, grafieken van beurskoersen en de menselijke long zijn tot op zekere hoogte ook zelfgelijkvormig (je kunt in het echt natuurlijk niet oneindig ver inzoomen). Door fractals te bestuderen, kunnen we ook deze fenomenen beter begrijpen.

De romanesco broccoli is niet alleen rijk aan vitamine c, hij heeft ook nog een prachtige fractalstructuur.

Eerlijk is het makkelijkst

Af en toe krijg ik een onbedwingbare opruimdrang. Eindelijk ga ik die foto's van de stedentrip van een paar maanden terug inplakken, zal ik mijn kleren in nette, gesorteerde stapels in de kast leggen en ga ik de chaos van bonnetjes en facturen veranderen in een nette administratie. Vooral dat laatste valt steeds weer tegen. Bij het maken van een overzicht van mijn uitgaven, kan ik de juiste bonnetjes nooit vinden. Hoeveel kostte dat boek over statistiek ook alweer? Was het 15 of 20 euro? Het is verleidelijk om dan maar ongeveer te gokken, maar alle wiskundigen weten dat dit erg moeilijk goed te doen is.

De cijfers en getallen die mensen zelf verzinnen, kloppen namelijk zelden met de gebruikelijke patronen. We zijn extreem slecht in het maken van willekeurige patronen.

Een wiskundeleraar gaf zijn leerlingen eens een wat merkwaardige opdracht. Ze mochten kiezen: 200 keer een muntje gooien en de uitkomsten opschrijven óf doen alsof ze een muntje opgooiden en zelf 200 uitkomsten verzinnen. De leraar kon na één blik op de uitkomsten onmiddellijk zeggen welke echt waren en welke niet. De neppatronen waren veel te netjes, de echte bevatten bijvoorbeeld rijtjes van zeven keer kop achter elkaar. Als mens zou je na een paar keer kop snel weer munt opschrijven.

Willekeurig patroon
Hiernaast staan twee patronen. Zie je welke het meest willekeurig is?
(De oplossing staat achter in dit boek.)

Patroon 1

1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0

Patroon 2

1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0

Vraag ook maar eens aan je vrienden op een feestje om zich zo willekeurig mogelijk over de ruimte te verdelen. Dan gaat iedereen ongeveer even ver van elkaar af staan en wordt de hele ruimte keurig gebruikt. Een echt willekeurig patroon is veel grilliger: dan zouden op de ene plek toevallig wat mensen bij elkaar staan, terwijl verderop iemand helemaal alleen staat. Eigenlijk lijkt zo'n patroon meer op dat van een echt feestje: bij de drank staat er een kluitje mensen en de wiskundige staat met zijn leuke experimenten over willekeur al snel alleen.

Natuurlijk wil je bij je administratie helemaal geen willekeurige getallen gebruiken, je wilt dat de bedragen zo realistisch mogelijk zijn. Maar zodra je getallen op de een of andere manier gaat gokken, val je snel door de mand. Lijsten met bedragen voldoen namelijk aan allerlei tegenintuïtieve wetten. Zo is er de Wet van Benford (genoemd naar de natuurkundige Frank Benford), die zegt dat niet elk cijfer even vaak voorkomt aan het begin van een getal: de één komt het meest voor (ongeveer in 30% van de gevallen) en de negen het minst (minder dan 5% van de gevallen). Met deze Wet van Benford wordt belastingfraude opgespoord. Kortom: het is zo moeilijk om de cijfers voor je administratie geloofwaardig te verzinnen, dat het waarschijnlijk minder werk is om de bonnetjes bij elkaar te zoeken.

IONICA

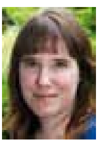
MUSEUMTIP Escher in het Paleis

De Nederlandse kunstenaar M.C. Escher (1898-1972) is bekend om zijn vlakvullingen en 'onmogelijke' prenten. In het museum Escher in het Paleis, in Den Haag, is veel van zijn werk te zien, zowel de meer realistische prenten uit het begin van zijn carrière als alle beroemde werken – en vast ook nog wel wat werken die je nog niet kende.

Op de bovenste verdieping kun je zelf achterhalen hoe bepaalde vormen van gezichtsbedrog werken. Zo is er een kamer waar je met wat andere mensen in kunt gaan staan, en omdat de kamer scheef is (maar recht lijkt) lijk je opeens veel groter dan die lange vriend, of veel kleiner dan je kleine broertje!

Meer informatie: www.escherinhetpaleis.nl.

Zit er een patroon in deze reeks?



Mijn vriendin Cristel studeerde geschiedenis, met als specialisatie achttiende-eeuwse dagboeken. Op verjaardagen belandt ze steevast naast iemand die werkelijk alles weet van de Peloponnesische Oorlog. Als zo iemand hoort dat zij een historica is, dan verwacht hij dat ze daar uren met hem over kan praten. Cristel vindt het dan altijd een beetje gênant om toe te moeten geven dat zij helemaal niets weet van de Peloponnesische Oorlog.

Als wiskundige kom je bijna nooit in zulke situaties, omdat de meeste mensen bij wiskunde niet verder komen dan de stelling van Pythagoras. Daarom was ik zo verbaasd toen iemand laatst op een borrel aan me vroeg hoe het zat met het vermoeden van Collatz.

Ik wist gelukkig wel wat dat vermoeden is. Het gaat over reeksen getallen. Je begint met een willekeurig geheel getal, groter dan nul. Als het getal even is, dan deel je het door twee. Als het getal oneven is, dan vermenigvuldig je het met drie en tel je er één bij op. Daarna herhaal je dit proces met de uitkomst, en opnieuw, en opnieuw. Bijvoorbeeld:

6 -> 3 -> 10 -> 5 -> 16 -> 8 -> 4 -> 2 -> 1

of

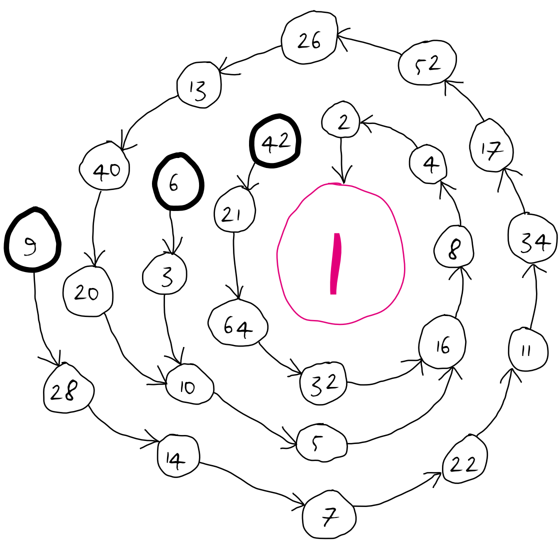
13 -> 40 -> 20 -> 10 -> 5 -> 16
-> 8 -> 4 -> 2 -> 1

Je stopt bij 1, omdat je vanaf daar in een vicieuze cirkel belandt: 1 gaat immers naar 4 en dan via 2 weer terug naar 1. Het vermoeden van Collatz is dat je altijd op 1 uitkomt, met welk getal je ook begint.

Probeer het zelf maar eens voor je lievelingsgetal. Als je getal kleiner is dan 10^{18} dan kom je zeker op één uit, want tot die grens is het vermoeden met de computer getest. Het aantal stappen kan behoorlijk groot worden: als je begint met een bescheiden 27 heb je bijvoorbeeld al 112 stappen nodig voor je bij één eindigt.

De meeste wiskundigen denken dat het vermoeden van Collatz waar is en dat je inderdaad voor elk getal bij één zult eindigen. Maar niemand heeft een bewijs. De in 1996 overleden wiskundige Paul Erdős verzuchtte volgens de overlevering dat de wiskunde nog niet klaar was voor dit soort moeilijke problemen. Voor de zekerheid loofde hij toch maar 500 dollar uit voor een oplossing. Die oplossing is er nog steeds niet.

Dit alles vertelde ik op de borrel. De getallenvoorbeelden zocht ik snel op met mijn telefoon, iets wat ik ook van harte aan kan raden bij lastige vragen over de Peloponnesische Oorlog. De vragensteller keek me wat



teleurgesteld aan. Dus dit kunnen wiskundigen níet oplossen? Wat zitten jullie dan de hele dag achter jullie bureaus te doen? En wat kunnen jullie wel?

Het is misschien gênant om een vraag te krijgen over een onderwerp waarvan je nog nooit hebt gehoord. Maar het is nog veel gênanter om toe te moeten geven dat jij en je vakgenoten een ogenschijnlijk eenvoudig probleem niet kunnen oplossen.

Ionica

Het vermoeden van Kepler

Hoe stapel je sinaasappels zo dicht mogelijk op elkaar? Elke groenteboer en marktkoopman zal hetzelfde antwoorden: je maakt eerst een laag sinaasappels die zo dicht mogelijk tegen elkaar aanliggen. Zo krijg je een zeshoekige regelmaat. Daarna stapel je de volgende laag sinaasappels in de kuiltjes – en zo ga je verder tot je een mooie piramide hebt.

Hoe efficiënt is deze manier van stapelen? De nette stapeling vult ongeveer 74% van de ruimte op. Ter vergelijking: als je sinaasappels zomaar willekeurig zou neergooien, dan gebruiken ze gemiddeld maar 65% van de ruimte. Netjes opstapelen levert dus heel wat ruimtebesparing op. Het gekke is dat niemand zeker weet of er niet een nog betere manier van stapelen bestaat.

Kanonskogels

Hoewel groentemannen ongetwijfeld al eeuwenlang hun sinaasappels in een piramidevorm met een zeshoekige regelmaat opstapelden, was het Johannes Kepler die in 1611 als eerste het vermoeden formuleerde dat er echt geen efficiëntere manier van bolstapelen bestaat. Kepler dacht bij de stapelingen trouwens vooral aan kanonskogels. Het was in die tijd immers een belangrijke vraag hoe die kogels het beste op een scheepsdek konden worden gestapeld.

Nadat Kepler zijn vermoeden over de best mogelijke stapeling had geformuleerd, lukte het lange tijd werkelijk niemand om ook maar iets te bewijzen over bolstapelingen. Sterker nog, het lukte niet eens om te bewijzen dat het zeshoekige rooster de beste manier was om één laag bollen te maken. Gelukkig bewees de Noorse wiskundige Axel Thue dit in 1892.

ONREGELMATIGHEDEN

Eerder in de negentiende eeuw had de onvolprezen wiskundige Carl Friedrich Gauss bewezen dat een regelmatige stapeling in elk geval nooit meer dan 74% van de ruimte kan vullen. Dus áls er al een betere stapeling bestaat, dan moet het een onregelmatige stapeling zijn. Een mooie stap vooruit, maar om het vermoeden van Kepler te bewijzen, moesten nog steeds alle onregelmatige stapelingen worden bekeken.

In 1953 liet de Hongaarse wiskundige László Fejes Tóth zien dat het bepalen van de maximale dichtheid van alle mogelijke stapelingen kon worden teruggebracht tot een eindig aantal berekeningen. Helaas was dit aantal berekeningen nog steeds zo groot dat het praktisch onhaalbaar leek om ze uit te voeren. Tóth sprak de hoop uit dat computers in de toekomst snel genoeg zouden worden om het vermoeden te bewijzen.

EEN BEWIJS! EEN BEWIJS?

Vanaf 1992 stortte de Amerikaanse wiskundige Thomas Hales zich op het uitvoeren van de door Tóth voorgestelde aanpak. Zes jaar later kon hij zijn bewijs presenteren. Maar was het wel een bewijs? Hales' bewijs bestond uit 250 kantjes plus een slordige drie gigabyte aan computercode en data (wat ongeveer drie miljoen pagina's tekst is).

Twaalf wiskundigen werkten vier jaar lang aan de controle. Uiteindelijk waren ze voor 99% zeker dat het bewijs correct is. Ze konden niet 100% zeker zijn, omdat het onbegonnen werk is om alle computercode en data te controleren. Als het een uur kost om één bladzijde te controleren, dan zouden ze pas rond het jaar 2340 klaar zijn.

Maar de deskundigen waren het erover eens dat het theoretische deel van het bewijs klopte en dat de code ook in orde leek. Hales' bewijs werd gepubliceerd in het zeer prestigieuze tijdschrift *Annals of Mathematics*. We zijn er nu dus 99% zeker van dat het Vermoeden van Kepler eigenlijk de Stelling van Hales is. Maar heel misschien komt er ooit een heel slimme marktkoopman die tóch zijn sinaasappels nog beter weet te stapelen...

Waarom er soms twee trams tegelijk komen

Laatst moest ik weer eens heel lang wachten op tram 9. Toen eindelijk de juiste tram de hoek om kwam, zag ik dat erachteraan gelijk nóg een tram 9 kwam. Was dit na de OV-chipkaart een nieuwe manier om reizigers te pesten? Een dienstregeling met na een lange tussenpoos steeds twee trams achter elkaar? Of voelden de tramchauffeurs zich niet meer veilig na alle PVV-retoriek en durfden ze alleen samen op pad?

In de tram bedacht ik echter dat het onvermijdelijk is dat trams regelmatig op deze manier samenklonteren. Stel dat de trams normaal tien minuten na elkaar rijden. Als een tram op de een of andere manier vertraging oploopt (toeristen die moeizaam vragen of deze tram naar de Dam rijdt, een fietser die in de rails klem zit of een verhuisbusje dat op de trambaan wordt uitgeladen), dan verzamelen zich bij zijn volgende haltes iets meer passagiers. De tram komt daar immers wat later en dus hebben mensen langer de tijd om aan te komen bij de halte. Vervolgens duurt het instappen wat langer, waardoor de tram nog meer vertraging oploopt. Waardoor bij de