

Het symmetrie-monster

Een wiskundige op zoek naar het geheim van
een van de belangrijkste natuurverschijnselen

Marcus du Sautoy



UITGEVERIJ NIEUWEZIJD'S

Oorspronkelijke titel: *Finding Moonshine – A Mathematician’s Journey through Symmetry*, Fourth Estate, een imprint van HarperCollinsPublishers, Londen 2008.

Eerste editie (twee oplagen) augustus 2009

Tweede editie juni 2011

Uitgegeven door: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam

Vertaling: Fred Hendriks, Brunssum

Redactionele adviezen: Ionica Smeets, www.wiskundemeisjes.nl

Zetwerk: Holland Graphics, Amsterdam

Omslagontwerp: Studio Jan de Boer, Amsterdam

© 2008, 2009, 2011, Marcus du Sautoy

Nederlandse vertaling © 2009, 2011, Uitgeverij Nieuwezijds

Afbeelding omslag © HarperCollins Publishers Ltd. 2008

ISBN 978 90 5712 335 1

NUR 918



Bij de productie van dit boek is gebruikgemaakt van papier dat het keurmerk van de Forest Stewardship Council (fsc) mag dragen. Bij dit papier is het zeker dat de productie niet tot bosvernietiging heeft geleid.

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm, geluidsband, elektronisch of op welke andere wijze ook en evenmin in een retrieval system worden opgeslagen zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Hoewel dit boek met veel zorg is samengesteld, aanvaarden schrijver(s) noch uitgever enige aansprakelijkheid voor schade ontstaan door eventuele fouten en/of onvolkomenheden in dit boek.

Inhoud

1 Augustus: einde en begin	I
2 September: nieuwe dobbelstenen	31
3 Oktober: het paleis van de symmetrie	61
4 November: stamvergadering	87
5 December: verbanden	111
6 Januari: onmogelijkheden	137
7 Februari: revolutie	169
8 Maart: ondeelbare vormen	203
9 April: klinkende symmetrie	237
10 Mei: de praktijk	257
11 Juni: sporadisch	287
12 Juli: weerspiegelingen	315
Aanbevolen literatuur	341
Dankwoord	345
Illustratieverantwoording	347
Index	351



Augustus: einde en begin

Het heelal is gebouwd volgens een ontwerp waarvan de diepe symmetrie op een of andere manier aanwezig is in de inwendige structuur van ons intellect.

– PAUL VALÉRY

MIDDAG, 26 AUGUSTUS, DE SINAÏ-WOESTIJN

Het is mijn veertigste verjaardag. Het is veertig graden. Ik heb me ingesmeerd met een zonnebrandcrème met factor veertig en houd me schuil in de schaduw van een rieten hut aan de kust van de Rode Zee. Saudi-Arabië ligt aan de overzijde van het blauwe water te glinsteren. Waar het koraalrif langs de kust naar de zeebodem afdaalt, breken de golven. Achter me rijzen de bergen van de Sinaï op.

Ik maak me normaal gesproken niet erg druk om verjaardagen, maar voor een wiskundige is veertig een beladen leeftijd; niet vanwege een mysterieuze of bizarre getallensymboliek, maar omdat de algemene opvatting luidt dat je tegen je veertigste je beste werk hebt geleverd. Men zegt dat wiskunde een spel is voor jonge mensen. Nu ik zelf veertig jaar door de wiskundige tuinen heb gedwaald, moet ik de Sinaï dan zien als een onheilspellend oord? Als een dorre woestijn waar een verbannen volk veertig jaar heeft rondgezworven? De Fields-medaille, die geldt als de hoogste wiskundige onderscheiding, wordt alleen toegekend aan wiskundigen onder de veertig. De medailles worden eens in de vier jaar uitgereikt. Volgend jaar rond deze tijd zullen in Madrid de nieuwste winnaars bekend worden gemaakt, maar ik ben te oud om nog aanspraak op die onderscheiding te mogen maken.

Als kind wilde ik helemaal geen wiskundige worden. Ik had al op jonge leeftijd besloten dat ik aan de universiteit talen wilde studeren. Dat was mijn

geheime manier om mijn ultieme droom te verwezenlijken: spion worden. Voor haar huwelijk had mijn moeder bij Buitenlandse Zaken gewerkt. Het corps diplomatique vond in de jaren zestig van de vorige eeuw echter dat het moederschap niet te verenigen was met de diplomatieke dienst, zodat ze het ministerie moest verlaten. Maar naar eigen zeggen mocht ze wel de beschikking houden over het kleine zwarte pistool dat elke medewerker van Buitenlandse Zaken verplicht bij zich droeg. 'Je weet maar nooit wanneer je weer wordt opgeroepen voor een geheime missie in het buitenland', zei ze raadselachtig. Het pistool was ergens in huis verstopt, beweerde ze.

Ik heb het hele huis afgezocht naar het wapen, maar blijkbaar was mijn moeder opgeleid in de kunst van het verbergen. De enige manier waarop ik mijn eigen pistool kon bemachtigen was door zelf bij Buitenlandse Zaken te gaan werken en spion te worden. En als ik van enig nut wilde zijn, moest ik natuurlijk Russisch kunnen spreken.

Op school wilde ik zoveel mogelijk talen leren: Frans, Duits, Latijn. De BBC begon met een tv-cursus Russisch. Mijn docent Frans, meneer Brown, probeerde me te helpen, maar het lukte me maar niet het woord 'hallo' – *zdravstvoejtje* – uit te spreken, zelfs niet na acht weken cursus. Ik begon wanhopig te worden. Ik begon ook steeds meer gefrustreerd te raken door het feit dat er geen logica stak achter het gedrag van bepaalde buitenlandse werkwoorden en waarom bepaalde zelfstandig naamwoorden mannelijk of vrouwelijk waren. Het Latijn bood nog enige lichtpuntjes omdat de strikte Latijnse grammatica appelleerde aan mijn groeiende verlangen naar dingen die deel uitmaakten van een of ander samenhangend, logisch systeem, en niet slechts ogenschijnlijk willekeurige associaties waren. Of misschien kwam het doordat mijn docent altijd mijn naam gebruikte als voorbeeld voor de tweede declinatie: Marcus, Marce, Marcum...

Toen ik twaalf was, wees mijn wiskundedocent me een keer tijdens een les aan en zei: 'Du Sautoy, melden na afloop van de les.' Ik dacht dat ik in de problemen zat. Ik volgde hem naar buiten en toen we bij de achterkant van het gebouw kwamen, pakte hij een sigaar uit zijn zak. Hij legde uit dat hij hier altijd heen ging om tijdens de pauze te roken. De andere docenten hadden liever niet dat er in de docentenkamer gerookt werd. Hij stak langzaam zijn sigaar aan en zei: 'Ik denk dat jij je eens zou moeten verdiepen in de wiskunde.'

Zelfs vandaag de dag weet ik niet precies waarom hij van alle leerlingen juist mij voor deze openbaring had uitgekozen. Ik was absoluut geen bijzonder wiskundetailent en veel van mijn vrienden leken net zo goed in het vak als ik. Maar iets heeft meneer Bailson op de gedachte gebracht dat ik misschien graag zou willen uitvinden waar het in de wiskunde werkelijk om draait.

Hij zei tegen me dat ik de column van Martin Gardener in *Scientific Ame-*

rican maar eens moest lezen. Hij gaf me de titels van een paar boeken die ik misschien wel leuk zou vinden, waaronder *The Language of Mathematics* van Frank Land. Het simpele feit dat een docent persoonlijke belangstelling voor me toonde, was voor mij voldoende reden om nader te onderzoeken waar zijn fascinatie voor het vak vandaan kwam.

Het weekend daarna ging ik met mijn vader naar Oxford, de dichtstbijzijnde universiteitsstad. Op een kleine winkelpui aan The Broad stond de naam Blackwell's. Het zag er niet erg veelbelovend uit, maar iemand had mijn vader verteld dat dit het mekka van de academische boekwinkels was. Als je de winkel binnen stapte, begreep je waarom. Achter de kleine voordeur bleek een gigantische winkel schuil te gaan, net als bij de TARDIS van Doctor Who. Wiskundeboeken, zo hoorden we, lagen in de Norrington Room, zoals het souterrain heette.

Toen we naar beneden liepen, opende zich voor ons een enorme grotachtige ruimte, ogenschijnlijk volgestouwd met alle wetenschappelijke boeken die ooit konden zijn gepubliceerd. Het was als Aladdins wondergrot, maar dan vol wetenschappelijke werken. We vonden de kasten met wiskundeboeken. Terwijl mijn vader op zoek ging naar de boeken die mijn leraar mij had aangeraden, begon ik boeken uit de kast te plukken en te bekijken. Om een of andere reden leken er ontzettend veel gele boeken te staan. Mijn aandacht werd getrokken door wat er in die gele boeken stond. De inhoud zag er vreemd uit. Ik herkende allerlei Griekse letters van mijn kortstondige kennismaking met het Grieks. Ik zag doolhoven van pietepeuterige cijfers en letters die x 'en en y 's omlijstten. Op elke bladzijde stonden woorden vetgedrukt, zoals **Lemma** en **Bewijs**.

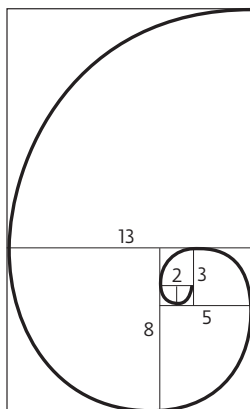
Ik begreep hier helemaal niets van. Er stonden een paar studenten tegen de boekenkasten geleund die de boeken leken te lezen alsof het romans waren. Zij begrepen deze taal blijkbaar wel. Het was een of andere code. Op dat moment besloot ik dat ik deze wiskundige hiërogliefen wilde leren ontcijferen. Toen we bij de kassa afrekenden, zag ik een tafel vol gele paperbacks. 'Dat zijn wiskundetijdschriften', legde de winkelbediende uit. 'De uitgeverijen geven ze gratis weg om academici te stimuleren een abonnement te nemen.'

Ik pakte een nummer van iets wat *Inventiones Mathematica* heette en stopte het in de tas met zojuist gekochte boeken. Dit was mijn uitdaging. Kon ik de 'mathematische inventies', de wiskundige vindingen in dit boek ontcijferen? Sommige artikelen waren in het Duits, een was er in het Frans en de rest was in het Engels. Maar het was de wiskundige taal die ik nu per se wilde doorgronden. Wat betekende 'Hilbertruimte' en 'isomorfiseprobleem'? Welke boodschap lag verscholen in deze regels met sigma's en delta's en symbolen waarvan ik de naam niet eens kende?

Thuis boog ik me meteen over de boeken die we hadden gekocht. Met

name *The Language of Mathematics* intrigeerde me. Voor onze expeditie naar Oxford had ik wiskunde nooit als een taal bekeken. Op school leek het gewoon een verzameling getallen die je in verschillende moeilijkheidsgraden kon vermenigvuldigen of delen, optellen of aftrekken. Maar toen ik door dit boek bladerde, begreep ik waarom mijn docent me had gezegd uit te vinden 'waar het in de wiskunde werkelijk om draait'.

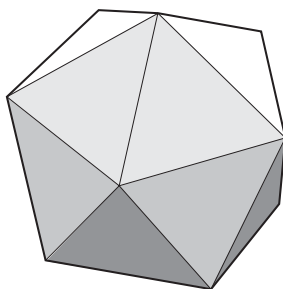
In dit boek stonden geen delingen met zoveel decimalen of zoiets. Hier werden bijvoorbeeld belangrijke cijferreeksen besproken, zoals de Fibonacci-getallen. Volgens het boek verklaarden deze getallen blijkbaar hoe bloemen en slakkenhuizen groeien. Je krijgt elk getal uit de reeks door de twee voorgaande getallen bij elkaar op te tellen. De reeks begint met 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Het boek legde uit dat deze getallen als het ware een code vormen die een slakkenhuis tijdens het groeiproces vertelt wat het als volgende moet doen. Een kleine slak begint met een klein vierkant huis van 1×1 . Iedere keer wanneer de slak daarna zijn schelp ontgroeit, voegt hij een nieuwe kamer aan het huis toe. Maar aangezien hij verder geen basis heeft om vanuit te gaan, voegt hij eenvoudigweg een kamer toe waarvan de afmetingen de som van de afmetingen van de twee voorgaande kamers zijn. Het resultaat van deze groei is een spiraal (figuur 1). Het was mooi en eenvoudig. Deze getallen zijn fundamenteel, aldus het boek, voor de manier waarop de natuur dingen laat groeien.



Figuur 1: Hoe een slak met behulp van de Fibonacci-getallen zijn huis bouwt.

Op andere pagina's zag ik afbeeldingen van interessante driedimensionale objecten die ik nog nooit eerder had gezien, opgebouwd uit vijfhoeken en

driehoeken. Een ervan heette een icsaëder, oftewel een twintigvlak, en had twintig driehoekige vlakken (figuur 2). Als je van een van deze objecten (in het boek polyeders genoemd, oftewel veelvlakken) het aantal vlakken en hoekpunten (in het boek vertexen genoemd) optelde en daarna het aantal ribben ervan aftrok, was de uitkomst altijd 2. Een kubus heeft bijvoorbeeld 6 vlakken, 8 hoekpunten en 12 ribben: $6 + 8 - 12 = 2$. Het boek beweerde dat deze truc bij elk veelvlak werkte. Dat leek wel wat op een goocheltruc. Ik probeerde het uit met het veelvlak dat uit twintig driehoeken bestond.



Figuur 2: De icsaëder met zijn twintig driehoekige vlakken.

Ik vond het lastig me een zo duidelijke voorstelling van het hele object te maken dat ik alles kon tellen. Zelfs als ik er een van karton maakte, was het ontmoedigend om al die ribben bij te houden. Maar toen leerde mijn vader me een foefje. ‘Hoeveel driehoeken zijn er?’ Nou, het boek zei dat het er twintig waren. ‘Oké, dat zijn dus zestig ribben, maar elke ribbe wordt gedeeld door twee driehoeken. Daarmee kom je uit op dertig ribben.’ Kijk, dat was nog eens echte goocheltruc. Zonder naar de icsaëder te kijken, kon je berekenen hoeveel ribben het had. Dezelfde truc werkte ook bij de hoekpunten. De twintig driehoeken hebben zestig hoekpunten. Maar deze keer kon ik op de afbeelding zien dat elk hoekpunt door vijf driehoeken werd gedeeld. De icsaëder had dus twintig vlakken, twaalf hoekpunten en dertig ribben. En inderdaad: $20 + 12 - 30 = 2$. Maar waarom werkte deze formule bij elk veelvlak dat je koos?

In een ander boek was een heel deel gewijd aan de symmetrie van objecten zoals deze uit driehoeken opgebouwde veelvlakken. Ik had een vaag idee van wat ‘symmetrie’ betekende. Ik wist dat ik symmetrisch was, althans aan de buitenkant. Alles wat zich aan de linkerkant van mijn lichaam bevond, werd gespiegeld aan de rechterkant. Maar een driehoek leek veel meer symmetrie te bezitten dan alleen deze eenvoudige spiegelsymmetrie. Als je de

driehoek bijvoorbeeld een slag draaide, zag hij er nog altijd hetzelfde uit. Ik begon te beseffen dat ik eigenlijk niet helemaal zeker wist wat het betekende als je zei dat iets symmetrisch was.

Het boek stelde dat de gelijkzijdige driehoek zes symmetrieën bezat. Toen ik verder las, begreep ik dat de symmetrie van de driehoek werd bepaald door de dingen die je ermee kon doen zonder de vorm van de driehoek te wijzigen. Ik tekende een omtrek rond een driehoekig stuk karton en telde vervolgens het aantal manieren waarop ik de driehoek kon oppakken en neerleggen, zodat hij precies in die getekende omtrek paste. Elk van deze manipulaties of bewegingen was volgens het boek een 'symmetrie' van de driehoek. Een symmetrie was dus iets actiefs, en niet iets passiefs. Het boek dwong me een symmetrie te beschouwen als een handeling die ik met de driehoek kon uitvoeren om hem binnen zijn eigen omtrek te verplaatsen, en niet als een natuurlijke eigenschap van de driehoek zelf. Ik begon de symmetrieën van de driehoek te tellen door te kijken welke dingen ik ermee kon doen. Ik kon de driehoek op drie manieren omkeren, waarbij telkens twee hoeken van plaats ruilden. Ik kon ook de driehoek met eenderde van een volledige rotatie draaien, met de klok mee en tegen de klok in. Dat waren alles bij elkaar vijf symmetrieën. Wat was de zesde?

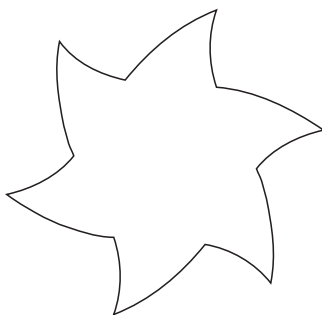
Ik had iets gemist, maar wat? Wanhopig probeerde ik handelingen te combineren om te zien of ik een nieuwe kon maken. Als ik namelijk twee van deze bewegingen na elkaar deed, kwam dat in feite neer op het uitvoeren van een enkele beweging. Als een symmetrie een beweging was die de driehoek weer binnen zijn omtrek plaatste, zou ik misschien een nieuwe beweging of een nieuwe symmetrie krijgen. Als ik nu eens de driehoek eerst omkeerde en dan een slag draaide? Nee, dat gaf hetzelfde resultaat als een van de andere omkeringen. En eerst omkeren, dan draaien en dan weer omkeren? Nee, dan kreeg je de draai in de andere richting, en die had ik al meegeteld. Ik had vijf symmetrieën gevonden, maar welke combinatie van bewegingen ik ook probeerde, ik kon geen nieuwe symmetrie ontdekken. Dus keerde ik weer terug naar het boek.

Daar las ik dat het ook als een symmetrie geldt wanneer je de driehoek gewoon laat liggen waar hij ligt. Vreemd... Maar al snel begreep ik waarom. Als je symmetrie definieert als alles wat je met de driehoek kunt doen waardoor hij binnen zijn eigen omtrek blijft, moet je ook het niet-aanraken – oftewel de driehoek oppakken en precies op dezelfde plek weer terugleggen – als handeling meetellen.

Ik voelde me aangetrokken tot dit idee van symmetrie. De symmetrieën van een object leken een beetje op de manipulaties bij een goocheltruc. De wiskundige laat je een driehoek zien en vraagt dan of je je wilt omdraaien. Achter je rug doet de wiskundige iets met de driehoek. Maar als je weer kijkt, ziet de driehoek er nog precies zo uit als daarvoor. Je zou de totale

symmetrie van een object kunnen beschouwen als alle bewegingen die een wiskundige ermee zou kunnen uithalen, zodanig dat je denkt dat hij de driehoek helemaal niet heeft aangeraakt.

Ik heb deze nieuwe truc op andere vormen uitgetoetst. Een interessante vorm die ik heb bekeken, was die van een zesarmige zeester (figuur 3). Ik kon hem niet omkeren zonder de vorm te veranderen: hij leek alleen maar in één richting te kunnen draaien, waardoor zijn spiegelsymmetrie verloren ging. Maar met zijn zes armen kon ik hem dus wel vijf keer een slag draaien en één keer gewoon laten liggen. Zes symmetrieën. Hetzelfde aantal als de driehoek.



Figuur 3: Een zesarmige zeester zonder spiegelsymmetrie.

Beide objecten hadden hetzelfde aantal symmetrieën. Maar het boek sprak over een taal die de stelling 'Deze twee objecten hebben verschillende symmetrieën' kon verwoorden en van betekenis voorzien. Deze taal zou onthullen waarom deze objecten in de wereld van de symmetrie twee verschillende soorten vertegenwoordigen. Volgens het boek zou deze taal ook duidelijk kunnen maken wanneer twee objecten die fysiek een verschillend uiterlijk hebben in feite dezelfde symmetrieën bezitten. Dit was de reis waarvoor ik me opmaakte: ontdekken wat symmetrie werkelijk is.

Naarmate ik vorderde in het boek, maakten de vormen en afbeeldingen plaats voor symbolen. Dit was de taal waar de titel van het boek naar wees. Er bleek een manier te zijn om de afbeeldingen in een taal om te zetten. Ik kwam enkele symbolen tegen die ik ook had gezien in het gele tijdschrift dat ik had meegenomen. Alles begon nu tamelijk abstract te worden, maar het leek alsof deze taal mijn ontdekking van de zes symmetrieën van de driehoek in symbolen probeerde te vatten. Als je twee symmetrieën, oftewel goocheltrucs, nam en ze na elkaar uitvoerde, bijvoorbeeld een spie-

geling gevolgd door een rotatie, kreeg je een derde symmetrie. De taal die deze interacties beschreef, had een naam: groepentheorie.

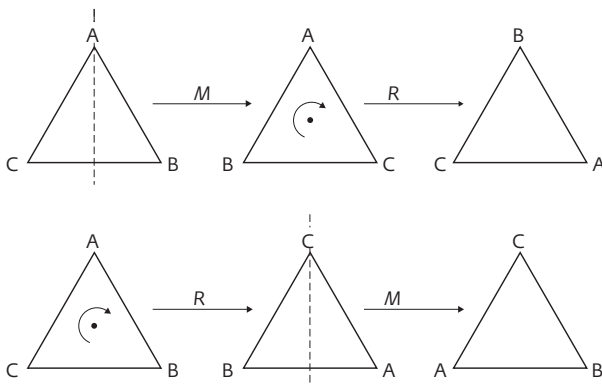
Deze taal bood inzicht in de vraag waarom de zes symmetrieën van de zesarmige zeester anders waren dan de zes symmetrieën van de driehoek. Aangezien een symmetrie een beweging was, kon ik twee symmetrieën van een object na elkaar uitvoeren om een derde symmetrie te krijgen. Maar de interacties binnen de groep van zeestersymmetrieën verlopen totaal anders dan de interacties binnen de groep van driehoeksymmetrieën. Op grond van de interacties binnen de symmetriegroep van een object kon je de groep van driehoeksymmetrieën onderscheiden van de groep van zesarmige-zeestersymmetrieën.

Bij de zeester leidde een rotatie gevolgd door een tweede rotatie tot een derde rotatie. Maar het maakte niet uit in welke volgorde je de twee rotaties uitvoerde. Als ik bijvoorbeeld de zeester 180° met de klok mee draaide en daarna 60° tegen de klok in, bleef de zeester in dezelfde positie als wanneer ik eerst de rotatie van 60° tegen de klok in en daarna de rotatie van 180° met de klok mee uitvoerde. Als ik daarentegen twee symmetrieën van de driehoek nam en de twee bewegingen die met deze symmetrieën correspondeerden uitvoerde, maakte het een groot verschil in welke volgorde ik dat deed. Een spiegeling gevolgd door een rotatie was niet hetzelfde als dezelfde rotatie gevolgd door dezelfde spiegeling. De taal van mijn boek had de afbeeldingen vertaald in de zin $M \cdot R \neq R \cdot M$, waarbij M de spiegeling is (van het Engels: *mirror*) en R de rotatie (figuur 4). De fysieke wereld van symmetrie kon worden vertaald in een abstracte algebraïsche taal.

In de loop van mijn middelbareschooltijd ben ik gaan begrijpen wat mijn wiskundeleraar had gedaan. De rekenkunde zoals ik die op school kreeg leek een beetje op de toonladders en arpeggio's die de oefenstof voor een muzikant vormen. Mijn leraar had me wat van de opwindende muziek voorgespeeld die op me lag te wachten als ik het technische deel van het onderwerp onder de knie kon krijgen. Ik begreep zeker niet alles wat ik las, maar ik wilde wel steeds meer te weten komen.

De meeste beginnende muzikanten zouden hun instrument aan de wilgen hangen als hun muzikale wereld uitsluitend uit toonladders en arpeggio's zou bestaan. Ze weten nog niet hoe Bach de *Goldberg Variaties* heeft gecomponeerd of hoe ze een bluesloopje moeten improviseren, maar ze kunnen er wel intens van genieten als ze het iemand anders horen doen. Door boeken zoals *The Language of Mathematics* ben ik gaan beseffen dat je hetzelfde kunt doen met wiskunde. Ik had geen idee wat 'een groep' eigenlijk was, maar ik begreep dat het deel uitmaakte van een geheime taal die je kon gebruiken om de wetenschap van de symmetrie te ontsluiten.

Dit was de taal die ik wilde leren. Het zou me misschien niet aan een baan bij Buitenlandse Zaken helpen en ik zou er misschien mijn gedroomde carriè-



Figuur 4: Een spiegeling gevolgd door een rotatie verschilt van een rotatie gevolgd door een spiegeling.

re als spion voor moeten opgeven, maar dit was een geheime code die me net zo intrigerend leek als alles wat ik in de wereld van de spionage zou kunnen tegenkomen. En in tegenstelling tot het Russisch of het Duits leek deze wiskundetaal een volmaakte geïdealiseerde taal, die volkomen logisch was en geen last had van onregelmatige werkwoorden of onlogische uitzonderingen.

Van alles wat ik in die boeken had aangetroffen, werd ik het meest gegrepen door de groepentheorie, de taal van de symmetrie. Zij leek een wereld vol afbeeldingen te vertalen in woorden. De gevaarlijke dubbelzinnigheden die de visuele wereld plagen, met al zijn optische illusies en luchtspiegelingen, werden transparant gemaakt door de kracht van deze nieuwe grammatica.

Op het strand in de schaduw van onze rieten hut zit ik te lezen in een van die gele boeken die ik bij Blackwell's had gezien. Ik vind de verhalen in die boeken net zo spannend als de beste vakantieroman. Dit boek is geschreven in de taal van de symmetrie en vertelt de wederwaardigheden van enkele van de vreemde symmetrische objecten die mede door deze taal aan het licht zijn gebracht. Maar het is ook een boek vol onvoltooide verhalen. Mijn veertigste verjaardag is slechts een halte op weg naar het antwoord op de vragen die me gingen obsederen naarmate ik dieper doordrong tot deze wereld van symmetrie.

Tot aan mijn verjaardag hier op het strand in de Sinai heb ik een lange weg afgelegd sinds ik voor het eerst kennismakte met de taal van symmetrie. De stappen die ik langs dit pad heb gezet, vormen een miniem onderdeel van een grotere zoektocht die wiskundigen hebben ondernomen sinds ze beseften dat symmetrie de sleutel vormde tot veel wezenlijke geheimen van de natuur.

TAAL VAN DE NATUUR

De zon gaat onder achter de bergen van de Sinai en het afgaande tij legt het koraalrif bloot, dat parallel langs de kustlijn loopt. Dit is het tijdstip waarop blanke mensen en stekelhuidigen de schaduw kunnen verlaten. Een wandelingetje helpt me misschien de chaos in mijn hoofd te ordenen. Voor mij lopen twee Israëlische mannen die in het bedoeïenenkamp logeren. Voor hen is de Sinai een welkome ontsnapping aan hun wachtdienst in Gaza. Hun ruggen zijn verschroeid doordat ze te lang in de Sinai-zon hebben gesnorkeld. Opgewonden wijzen ze naar het water, gefascineerd door iets wat ze op het oppervlak van het koraal gevonden hebben. Wanneer ik naar beneden kijk, zie ik plotseling een van de meest opmerkelijke symmetrische dieren op het koraal liggen.

Daar in het water bevindt zich een echte zeester, net als op de afbeelding waarmee ik als kind heb gespeeld. Ik weet niet zeker of ik wel eens een levende zeester heb gezien. Deze heeft de klassieke vijf armen die de meeste mensen met zeesterren associëren, maar hij is niet zo stijf als de tekenfilmachtige stekelhuidigen die ik gewend ben. Blijkbaar hebben sommige zeesterren, uit onvrede met de eenvoudige vijfpuntige stervorm, nog opzichtiger vormen van symmetrie ontwikkeld. De zonnebloemzeester begint zijn leven met vijf armen, maar in de loop van zijn achtjarig bestaan kan dit aantal uitgroeien tot wel 24. Het ontwikkelen van een vorm die in 24 verschillende richtingen precies hetzelfde lijkt, is een biologische bouwprestatie van formaat.

Maar waarom komt symmetrie in de natuur zoveel voor? Het is niet alleen een kwestie van esthetiek. Symmetrie in de natuur heeft voor mij alles te maken met taal, net als wiskunde. Ze biedt planten en dieren een manier om allerlei boodschappen over te dragen, van genetische superioriteit tot informatie over voedsel. Symmetrie is vaak verbonden met betekenis en kan daarom worden geïnterpreteerd als een zeer basale, haast oeroude vorm van communicatie. Een insect zoals de bij kan zonder symmetrie onmogelijk overleven.

Het gezichtsvermogen van de bij is uiterst beperkt. De beelden die een bij tijdens het rondvliegen ziet, zijn vergelijkbaar met wat wij zouden zien als we de wereld door een dikke glasplaat zouden bekijken. Een bij kan geen afstanden schatten, waardoor hij voortdurend tegen alles opbotst. Bovendien heeft hij last van kleurenblindheid. De groene achtergrond van de tuin ziet hij als grijs; rood onderscheidt hij beter omdat het als zwart afsteekt tegen het grijs. Maar hoewel de bij de wereld bekijkt door een bril met dikke glazen, is er één ding dat hij zeer goed kan waarnemen: symmetrie.

De honingbij houdt van de vijfhoekige symmetrie van kamperfoelie, de zeshoekige vorm van de clematis en de uiterst radiale symmetrie van de

margriet en de zonnebloem. De hommelmot heeft een voorkeur voor spiegelsymmetrie, zoals van de orchidee, de erwtenkruis of het vingerhoedskruis. Het gezichtsvermogen van bijen is voldoende geëvolueerd om deze belangrijke vormen te onderscheiden. Symmetrie is immers een kwestie van leven of dood. De bijen die worden aangetrokken tot vormen met een patroon, zijn de insecten die geen honger zullen lijden. Om de evolutionaire strijd om het voortbestaan te winnen moet de bij een expert in symmetrie zijn. Als een bij de aanwijzingen waar hij voedsel kan vinden niet zou kunnen ontcijferen, zou hij op goed geluk door de tuin zoemen en het afleggen tegen zijn superieure concurrenten die de patronen wel kunnen ontwaren.

Omdat de plant voor zijn bestuiving en het voortbestaan van zijn genetische nalatenschap op zijn beurt afhankelijk is van zijn vermogen om de bij naar zijn bloem te trekken, heeft ook hij een rol in deze natuurlijke dialoog gespeeld. De bloem die een volmaakte symmetrie kan bereiken, trekt meer bijen aan en overleeft langer in de evolutionaire strijd. Symmetrie is de taal waarvan de bloem en de bij zich bedienen om met elkaar te communiceren. Voor de bloem is de zeshoekige of vijfhoekige vorm een reclamebord dat schreeuwt: 'Kom hierheen!' Gecodeerd in de symmetrische vorm leest de bij de boodschap: 'Hier is voedsel!' Symmetrie duidt op iets speciaals, op iets met betekenis. Tegen de statische witte ruis die het grootste deel van de visuele wereld van een bij uitmaakt, onderscheiden de zes perfecte bloemblaadjes van de clematis zich als een muzikale frase vol harmonie.

Terwijl de tuin van de natuur zich ontwikkelde, ontwikkelde zich ook de verscheidenheid aan vormen en kleuren in de plantenwereld. Na miljoenen jaren opeenvolging van seizoenen, na miljoenen jaren van geometrische evolutie, biedt de tuin nu een overvloed aan patronen die hun woorden van welkom en hun beloften van heerlijk voedsel met trompetgeschal kenbaar maken.

Maar symmetrie is niet gemakkelijk te verwezenlijken. Een plant moet hard werken en in staat zijn om belangrijke natuurlijke hulpbronnen aan te wenden om het evenwicht en de schoonheid van de orchidee of zonnebloem te realiseren. Schoonheid van vorm is een extravagantie. Dat is de reden waarom alleen de meest aangepaste en gezondste individuele planten genoeg energie over hebben om een evenwichtige vorm te bereiken. De superioriteit van de symmetrische bloem wordt weerspiegeld in een grotere productie van nectar, en die nectar heeft een hoger suikergehalte. Symmetrie smaakt zoet.

Symmetrische bloemen of dieren geven een helder signaal dat ze genetisch superieur zijn aan hun buren. Daarom wemelt het in de dierenwereld van vormen die naar een volmaakt evenwicht streven. Mensen en dieren zijn genetisch geprogrammeerd om deze vormen als mooi te ervaren. Wij voelen ons aangetrokken tot dieren met een zo superieure genetische samenstelling dat ze energie kunnen aanwenden om symmetrie te maken.