

# INHOUD

Inleiding	9
Deel 1. De wet van de supermarkten	13
<i>De wet van Benford</i>	13
<i>Het multiplicatieve denken</i>	19
<i>Ons aangeboren gevoel voor getallen</i>	26
<i>Schrijvers zonder nullen of komma's</i>	37
<i>De logaritmische brug</i>	45
<i>Waarom is de wereld multiplicatief?</i>	45
Deel 2. Over appels en manen	63
<i>De hoogste berg op aarde</i>	63
<i>Wat zijn getallen?</i>	71
<i>Over het nut van paraplu's</i>	80
<i>Alles valt altijd naar alles</i>	86
<i>Het succes van de zwaartekracht</i>	95
<i>De vorm van de aarde</i>	103
Deel 3. De kronkels van de oneindigheid	111
<i>Over de lengte van grenzen</i>	111
<i>Onmetelijkheid en oneindigheid</i>	117
<i>De oneindige chocolaterie</i>	126
<i>De Peano-kromme</i>	127

<i>De drie dimensies van Euclides van Alexandrië</i>	144
<i>Naar de vierde dimensie en verder</i>	151
<i>De fractale dimensie</i>	157
Deel 4. De kunst van de vaagheid	165
<i>Het vijfde postulaat van Euclides</i>	165
<i>De illusie van kleuren</i>	175
<i>De wiskunde van de verborgen misvattingen</i>	183
<i>Correct redeneren zonder te weten waar je het over hebt</i>	157
<i>De vervormde meetkundige perceptie van piloten</i>	197
<i>De oplossing van het probleem</i>	209
Deel 5. De afgronden van ruimte en tijd	217
<i>Met welke snelheid beweeg je?</i>	217
<i>De speciale relativiteitstheorie</i>	227
<i>Het begrip ruimtetijd</i>	236
$E = mc^2$	248
<i>De algemene relativiteitstheorie</i>	259
<i>Op zoek naar zwarte gaten</i>	272
Voor wie meer wil weten	285





## INLEIDING

In 1980 legden onderzoekers van het Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques in Grenoble twee groepen kinderen het volgende raadsel voor:

*Een boot heeft 26 schapen en 10 geiten aan boord. Hoe oud is de kapitein?*

Een vreemde vraag. Wat heeft de leeftijd van de kapitein te maken met het aantal schapen en geiten dat hij vervoert? Toch wist 75% van de bijna tweehonderd zes- en zevenjarigen het antwoord, zonder een spoor van aarzeling. De meeste kinderen telden de getallen op en kwamen uit op 36. Maar toen hetzelfde raadsel aan een groep negen- en tienjarigen werd voorgelegd, begon 80% te protesteren en gaf slechts 20% antwoord. Tussen hun zevende en hun negende leren kinderen dus aanzienlijk kritischer te denken. Ze krijgen meer inzicht en afstand, zodat ze de zin van een vraag veel beter kunnen beoordelen.

Zelf was ik op die leeftijd dol op strikvragen en breinbrekers, moet ik toegeven, hoewel dat goed beschouwd eerder grappen dan wiskundeproblemen waren. Dit was een van mijn lievelings-raadsels:

*Een orkest van 50 musici speelt de Negende Symfonie van Beethoven in 70 minuten. Hoe lang doet een orkest van 100 musici erover?*

Natuurlijk hangt de lengte van een symfonie niet af van het aantal uitvoerenden, 70 minuten is 70 minuten. De vraag valt in dezelfde categorie als: *wat is zwaarder, een kilo lood of een kilo veren?* Antwoord: er is geen verschil, een kilo is een kilo.

Wat ik toen nog niet wist, is dat het proces van kritisch leren denken, van greep krijgen op de zin der dingen, nog heel lang doorgaat. Hoe ouder ik werd, hoe meer ik ontdekte dat woorden subtiele dubbele betekenissen kunnen hebben en dat mijn kennis van de wereld gaten vertoonde. Natuurlijk trap je als volwassene niet meer in de strikvrage waar een kind argeloos antwoord op geeft, maar dat betekent niet dat er geen valkuilen en vooroordelen meer op de loer liggen. Onze intuïtie is niet onfeilbaar, onze overtuigingen blijken soms niet te kloppen. Op mijn vijfendertigste kan ik zeggen dat elk jaar van mijn leven me nieuwe inzichten heeft opgeleverd, waardoor ik anders ben gaan denken over dingen die ik zeker meende te weten.

Wie de wereld wil begrijpen, wie nieuwsgierig is naar het heelal om ons heen, kan verrassende ontdekkingen doen. In feite deden de grote geleerden uit de wereldgeschiedenis precies hetzelfde als de kinderen die weigerden de leeftijd van de kapitein te noemen: ze keken kritisch naar wat ze voor hun neus kregen en verder dan hun neus lang was. Ze verzetten zich tegen de gevestigde orde. In de wetenschap mag, moet je dingen in twijfel trekken en de wiskunde is een van de machtigste instrumenten om dat te doen.

Wie zich in de wiskunde verdiept, neemt een kijkje achter de coulissen, achter de schermen van de wereld, waar de gigantische raderen van ons heelal draaien. Het is een fascinerend maar

verwarrend schouwspel. De werkelijkheid is soms anders dan we dachten en wonderlijker dan we ons kunnen voorstellen. Ze gooit onze aannamen omver en blaast onze zekerheden weg. Onbeduidende details kunnen grote mysteriën verhullen en kinderraadsels kunnen veel dieper gaan dan je op het eerste gezicht zou denken.

Nou vooruit, nog eentje dan:

*Als vier kippen vier eieren in vier dagen leggen,  
hoeveel eieren leggen acht kippen dan in acht dagen?*

Denk er maar even over na, we komen er nog op terug. Het enige wat ik er nu over wil zeggen, is dat ik als tienjarige niet kon weten dat dit raadsel me op een dag zou helpen de beroemdste formule aller tijden te begrijpen.

Laten we daarom een kijkje achter de schermen gaan nemen, samen op avontuur gaan. Bereid je voor op een of twee moeilijke momenten, twijfels die je moet overwinnen, ideeën die je moet laten rijpen: het is nu eenmaal niet mogelijk je manier van denken met één vingerknip te veranderen. Maar laat je daardoor niet ontmoedigen, het plezier van begrijpen is die inspanning dubbel en dwars waard. Op de volgende bladzijde begint onze reis door de wiskunde, op zoek naar de mooiste verborgen mechanismen die ons heelal te bieden heeft. Kijk nog maar eens goed om je heen, want het is niet ondenkbaar dat je je oude vertrouwde wereld na onze excursie met heel andere ogen beziet.





## DEEL 1

# De wet van de supermarkten

### *De wet van Benford*

Een reis door de wiskunde kan op elke willekeurige plek beginnen.

Vandaag vertrekken we vanuit je supermarkt. Vlak bij huis. Gewoon in de winkel waar je je dagelijkse boodschappen doet. Het maakt niet uit of dat een gigantische XXL-megamarkt is of de buurtsuper om de hoek. Als ze er maar een redelijk assortiment hebben en producten verkopen waar je elke dag behoefte aan hebt.

De omgeving is bekend. Je bent er al honderden, misschien wel duizenden keren geweest. Parallele schappen, metalen stellingen, het regelmatige gepiep van de barcodelezer bij de kassa, klanten die hun vaste route lopen en automatisch een pak melk of een paar blikjes in hun karretje leggen. Maar wij gaan vandaag geen boodschappen doen. Wij hebben een andere missie: observeren.

Want in je supermarkt ligt een intrigerend wiskundig pareltje verborgen. Nee, niet eens verborgen. Het ligt vlak voor je neus, al jaren. Open en bloot, je ziet het meteen. Een kleine afwijking, een dingetje van niks, een detail dat je normaal gesproken over het hoofd ziet, maar dat je opvalt als je erop gaat letten, als je gaat observeren, zoals wij. Dus pak een schriftje of je smartphone om aantekeningen te maken, dan kan ons onderzoek beginnen.

Kijk eens naar de prijzen van de producten, de rijen prijskaartjes aan de schappen. € 2,30 ... € 1,08 ... € 12,49 ... € 3,53 ... Volkomen willekeurige getallen, als je ze zo achter elkaar leest. € 1,81 ... € 22,90 ... € 0,64 ... De prijzen variëren van een paar centen tot vele euro's. Maar voor cijfers achter de komma hebben we geen belangstelling. Voor dit onderzoek kijken we alleen naar het eerste cijfer, het belangrijkste, het cijfer dat je een eerste indruk van de prijs geeft.

Kijk, een blik spruitjes van 530 gram voor € 1,54. Noteer een 1. Iets verderop een spuitbus deodorant 'gegarandeerd 24 uur fris' voor € 3,53. Noteer een 3. Een camembertje van 250 gram voor € 1,81. Noteer weer een 1. Een antiaanbakpan voor € 45,90. Die kost meer dan tien euro, dus er staan twee cijfers voor de komma, maar dat maakt niet uit, we concentreren ons alleen op het eerste cijfer. Noteer een 4. Een zakje zoute pinda's voor € 0,74. Het eerste significante cijfer is een 7.

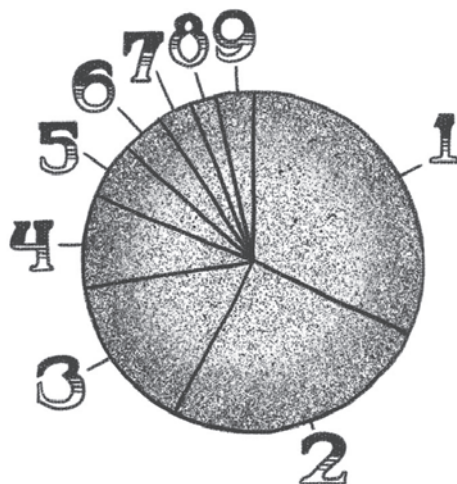
Zo lopen we een poosje kriskras door de supermarkt en onze reeks cijfers wordt steeds langer. 1 3 1 4 7 9 2 2 1 7 9 8 1 1 3 1 1 1 8 1 1 2 1 2 1 1 9 1 4 7 1 6 1 5 9 2 2 1 3 2 2 2 1 2 2 6 ... Maar tegelijkertijd bekruipt ons het gevoel dat er iets niet klopt. Er is iets onevenwichtigs aan die reeks. Hij bestaat hoofdzakelijk uit de cijfers 1 en 2, met hier en daar een 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Alsof we van nature op de laagste prijzen gefixeerd zijn. Dat is natuurlijk niet goed voor ons onderzoek.

We moeten ons misschien iets wetenschappelijker opstellen, als consciëntieuze statistici. Stoppen met de koopjesjacht en systematisch te werk gaan. Laten we een paar schappen selecteren en daar alle prijzen van alle producten noteren. Zonder uitzondering. Het is even werk, maar dan krijgen we wel een objectief beeld.

Een uur later staat je schriftje vol cijfers, lange reeksen die zich over de bladzijden slingeren. Tijd om de balans op te maken.

Na nog een uur tellen en checken en opnieuw tellen kun je er niet meer omheen. Je eerste indruk wordt bevestigd. Je hebt meer dan duizend prijzen genoteerd en een derde daarvan begint met een 1! Ruim een kwart begint met een 2 en hoe hoger het cijfer wordt, hoe minder vaak het voorkomt.

Dit is de schematische voorstelling van de verdeling die uit de bus is gerold<sup>1</sup>.



Er is in ons onderzoek nu geen sprake meer van toeval of een voorkeur voor lage prijzen, dus moeten we de feiten onder ogen zien: de eerste cijfers van supermarktprijzen zijn niet evenredig verdeeld. De lage cijfers hebben een duidelijke, aanzienlijke voorsprong op de hoge.

---

1. Dit onderzoek werd door de auteur in januari 2019 uitgevoerd, op in totaal 1226 prijzen, volgens de hierboven beschreven methode. De exacte resultaten waren als volgt: prijzen beginnend met een 1: 391 (31,9%), een 2: 315 (25,7%), een 3: 182 (14,8%), een 4: 108 (8,8%), een 5: 66 (5,4%), een 6: 50 (4,1%), een 7: 40 (3,3%), een 8: 30 (2,4%), een 9: 44 (3,6%).

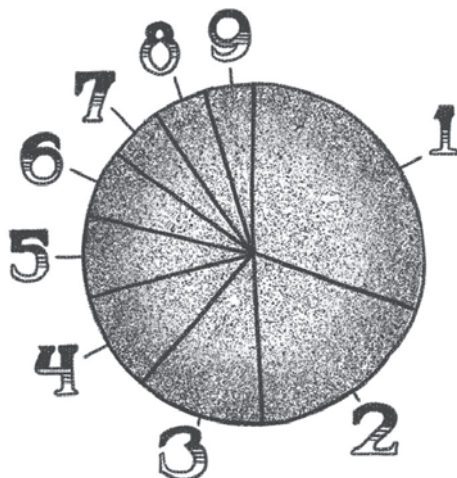
Waar komt die onevenwichtigheid vandaan? Een interessante vraag. Aan welke wet van de supermarkten, van de handel of van de economie gehoorzamen de prijzen, met dit vreemde resultaat tot gevolg? Waarom zijn de eerste cijfers van die prijzen niet evenredig vertegenwoordigd? De wiskunde discrimineert toch niet, alle cijfers zijn toch even belangrijk? Zonder vooringenomenheid, zonder voorkeuren, zonder favorieten? Maar de feiten liegen niet. En ze wijzen duidelijk in een andere richting. In de supermarkt heeft de wiskunde wel degelijk zijn lievelingetjes en die heten 1 en 2.

We hebben geobserveerd. We hebben geconstateerd. Nu moeten we gaan nadenken, analyseren en tot de kern komen. De feiten liggen er, maar het is aan ons om ze nader te onderzoeken en conclusies te trekken.

In maart 1938 publiceerde de Amerikaanse ingenieur en natuurkundige Frank Benford 'The Law of Anomalous Numbers' ('De wet van de afwijkende getallen'), een artikel waarin hij de begincijfers van grote verzamelingen gegevens analyseerde, afkomstig van meer dan twintigduizend observaties. Hij had lijsten met data die uiteenliepen van de lengte van rivieren tot het inwonertal van Amerikaanse steden, atoommassa's, willekeurige cijfers uit kranten en wiskundige constanten. En elke keer kwam Benford tot dezelfde conclusie: de eerste cijfers waren niet evenredig vertegenwoordigd. Ongeveer 30% van de getallen begon met een 1 en 18% met een 2. De percentages werden lager naarmate de cijfers hoger werden. Het cijfer 9 kwam het minst als begincijfer voor, in maar 5% van de gevallen.

Benford kwam niet op het idee om zijn statistische resultaten bij de winkel om de hoek te gaan checken, daarom hebben wij dat voor hem gedaan en inderdaad, de uitkomst is hetzelfde.

Oké, de percentages zijn niet exact gelijk, maar de grote lijn ver-  
toont opmerkelijke overeenkomsten.



De studie van Benford toont aan dat de data die we hebben ver-  
zameld in een groter plaatje passen. Ze zijn niet specifiek voor  
supermarkten, maar onderdeel van een veel algemener verschijn-  
sel. Na 1938 werd diezelfde verdeling ook door diverse andere  
wetenschappers waargenomen, in steeds meer, steeds extremere  
situaties.

Bijvoorbeeld op het gebied van de demografie. Van de 203 lan-  
den op de planeet aarde hebben er 62 (30,5%) een inwonertal  
dat met een 1 begint, bijvoorbeeld China, het dichtstbevolkte  
land ter wereld (1,4 miljard inwoners), Mexico (122 miljoen),  
Senegal (13 miljoen) of de eilandstaat Tuvalu (10.800). Daaren-  
tegen zijn er slechts 14 landen waarvan het inwonertal met een 9  
begint (6,9%).

En wat dacht je van de sterrenkunde? Van de acht planeten  
die om de zon draaien, hebben er vier een diameter die met een  
1 begint: Jupiter (142.984 km), Saturnus (120.536 km), de aarde  
(12.756 km) en Venus (12.104 km). De zon zelf heeft een dia-