

Inhoud

Overzicht	viii
Lijst van afbeeldingen	xvi
Woord van dank	xxi
DEEL I: GEB	
Inleiding: Een musico-logisch offer	3
<i>Driestemmige Inventie</i>	35
Hoofdstuk I: De MU-puzzel	40
<i>Tweestemmige Inventie</i>	51
Hoofdstuk II: Betekenis en vorm in de wiskunde	55
<i>Sonate voor Achilles-solo</i>	73
Hoofdstuk III: Motief en achtergrond	76
<i>Contracrostipunctus</i>	89
Hoofdstuk IV: Consistentie, volledigheid en meetkunde	98
<i>Klein harmonisch labyrint</i>	124
Hoofdstuk V: Recursieve structuren en processen	148
<i>Canon met intervallische vergroting</i>	178
Hoofdstuk VI: De lokatie van betekenis	183
<i>Chromatische fantasie en furie</i>	206
Hoofdstuk VII: Propositielogica	213
<i>Kreeftcanon</i>	233
Hoofdstuk VIII: Theoria Numerorum Typografica	239
<i>Een MU-offer</i>	270
Hoofdstuk IX: Mumon en Gödel	286
DEEL II: EGB	
<i>Praeludium & . . .</i>	319

Hoofdstuk X: Beschrijvingsniveaus en computersystemen	329
. . . <i>Fuga formicalis</i>	360
Hoofdstuk XI: Hersenen en denken	390
<i>Engelse Nederlandse Franse Duitse Suite</i>	425
Hoofdstuk XII: Geest en denken	429
<i>Aria met verschillende variaties</i>	455
Hoofdstuk XIII: BluS, VluS en Glus	472
<i>Air op G's snaar</i>	501
Hoofdstuk XIV: Over formeel onbeslisbare uitspraken van TNT en soortgelijke systemen	509
<i>Verjaardagscantatatata . . .</i>	535
Hoofdstuk XV: Buiten het systeem treden	540
<i>Opbouwende gedachten van een tabaksroker</i>	558
Hoofdstuk XVI: Zelf-ref en zelf-rep	575
<i>Het magnifieke Kreeft-idee</i>	636
Hoofdstuk XVII: Church, Turing, Tarski en anderen	648
<i>SHRDLU, wil mij uw vreugde tonen</i>	679
Hoofdstuk XVIII: Artificiële Intelligentie: een terugblik	687
<i>Contrafactus</i>	733
Hoofdstuk XIX: Artificiële Intelligentie: vooruitzichten	742
<i>Canon in aïs</i>	789
Hoofdstuk XX: Merkwaardige Lussen, of Verstrengelde Hiërarchieën: het hart van AI	792
<i>Zesstemmige Ricercar</i>	834
Noten	863
Bibliografie	867
Verantwoording	881
Nawoord	883
Register	885

Overzicht

DEEL I: GEB

Inleiding: Een musico-logisch offer. Het boek begint met het verhaal van Bachs *Musikalisches Opfer*. Bach bracht een onverwacht bezoek aan koning Frederik de Grote van Pruisen. Er werd hem verzocht op een thema dat de koning hem opgaf te improviseren. Zijn improvisaties vormden de grondslag voor dit meesterwerk. Het *Musikalisches Opfer* en zijn geschiedenis vormen een thema waarop ik door het boek heen 'improviseer'. Daardoor ontstaat een soort 'Metamuzikaal Offer'. Zelf-referentie en de wisselwerking tussen verschillende niveaus bij Bach worden behandeld. Dit leidt tot een bespreking van overeenkomstige ideeën in de prenten van Escher en vervolgens van de Stelling van Gödel. Een kort overzicht van de geschiedenis van de logica en de paradoxen wordt geboden als achtergrond voor de Stelling van Gödel. Dit leidt tot mechanisch redeneren en computers en de discussie rond de vraag of Artificiële Intelligentie mogelijk is. Ik sluit de Inleiding af door te vertellen hoe dit boek ontstond - vooral waarom ik Dialogen gebruik en hoe ik ertoe kwam ze te schrijven.

Driestemmige Inventie. Bach schreef vijftien driestemmige Inventionen. In deze driestemmige Dialoog worden de Schildpad en Achilles - de hoofdfiguren in de Dialogen - 'verzonnen' door Zeno (zoals dat ook werkelijk het geval was, ter illustratie van Zeno's bewegingsparadoxen). Zeer beknopt geeft deze Inventie al de sfeer weer van de Dialogen die nog zullen volgen.

Hoofdstuk I: De MU-puzzel. Er wordt een eenvoudig formeel systeem geïntroduceerd (het MIU-systeem) en om vertrouwd te raken met formele systemen wordt de lezer aangemoedigd een puzzel op te lossen. Er komt een aantal fundamentele begrippen aan de orde: streng, stelling, axioma, afleidingsregel, afleiding, formeel systeem, beslissingsprocedure, binnen/buiten het systeem werken.

Tweestemmige Inventie. Bach schreef ook vijftien tweestemmige Inventionen. Deze tweestemmige Dialoog werd niet door mij geschreven maar door Lewis Carroll, in 1895. Carroll leende Achilles en de Schildpad van Zeno en ik op mijn beurt leende ze van Carroll. Het onderwerp is het verband tussen redeneren, redeneren over redeneren, redeneren over redeneren over redeneren, enzovoort. In zekere zin is de Dialoog een tegenhanger van Zeno's paradoxen over de onmogelijkheid van beweging, en door gebruik te maken van eindeloze herhaling lijkt de Dialoog aan te tonen dat redeneren onmogelijk is. Het is een schitterende paradox en later in het boek wordt er enkele malen naar terugverwezen

Hoofdstuk II: Betekenis en vorm in de wiskunde. Er wordt een nieuw formeel systeem (het pi-systeem) geïntroduceerd, dat nog eenvoudiger is dan het MIU-systeem van Hoofdstuk 1. Hoewel ze aanvankelijk betekenisloos leken te zijn, blijken de symbolen plotseling betekenis te dragen dank zij de vorm van de stellingen waarin ze voorkomen. Deze onthulling is het eerste belangrijke inzicht in betekenis: namelijk dat betekenis diepgaand verband houdt met isomorfie. Er worden dan verschillende onderwerpen met betrekking tot betekenis behandeld, zoals waarheid, bewijs, manipulatie van symbolen en het ongrijpbare begrip 'vorm'.

Sonate voor Achilles-solo. Een Dialoog die de sonates van Bach voor vioolsolo imiteert. Hierin is Achilles de enige spreker, aangezien de Dialoog een transcriptie is van de ene kant van een telefoongesprek. Aan de andere kant van de lijn bevindt zich de Schildpad. Hun gesprek gaat over de begrippen 'motief' en 'achtergrond' in verschillende contexten - bijvoorbeeld in Eschers kunst. De Dialoog is zelf een voorbeeld van dit onderscheid omdat de woorden van Achilles een 'motief' vormen en de woorden van de Schildpad - impliciet besloten in wat Achilles zegt - een 'achtergrond'.

Hoofdstuk III: Motief en achtergrond. Het onderscheid tussen motief en achtergrond in de kunst wordt vergeleken met het onderscheid tussen stellingen en niet-stellingen in formele systemen. De vraag: 'Bevat een motief noodzakelijkerwijze dezelfde informatie als zijn achtergrond?' leidt tot het onderscheid tussen recursief, opsombare verzamelingen en recursieve verzamelingen.

Contracrostipunctus. Deze Dialoog staat in het boek centraal want hij bevat een aantal parafrazen van de naar zichzelf verwijzende constructie van Gödel en van zijn Onvolledigheidsstelling. Een van de parafrazen van de Stelling luidt: 'Voor iedere grammofoon is er een plaat die hij niet kan afspelen.' De titel van de Dialoog is een kruising tussen de woorden 'acrostichon' en 'contrapunctus', een Latijns woord dat Bach gebruikte om er de vele fuga's en canons die samen zijn *Kunst der Fuge* vormen mee aan te duiden. Er worden enkele expliciete verwijzingen naar de *Kunst der Fuge* gemaakt. In de Dialoog zelf zijn enkele acrostische grapjes verborgen.

Hoofdstuk IV: Consistentie, volledigheid en meetkunde. De voorafgaande Dialoog wordt uitgelegd, voor zover dat in dit stadium mogelijk is. Dit voert ons terug naar de vraag hoe en wanneer symbolen in een formeel systeem betekenis krijgen. De geschiedenis van de Euclidische en niet-Euclidische meetkunde wordt verteld, als een voorbeeld van het ongrijpbare begrip 'ongedefinieerde term'. Dit leidt tot gedachten over de consistentie van verschillende, elkaar wellicht 'beconcurrerende' meetkundes. Door deze uitleg wordt het begrip ongedefinieerde term opgehelderd en het verband tussen ongedefinieerde termen, waarneming en denkprocessen wordt verder overwogen.

Klein harmonisch labyrint. Dit is gebaseerd op een orgelwerk van Bach met dezelfde naam. Het is een speelse inleiding tot recursieve - dwz. ingebedde - structuren. De Dialoog bevat verhalen in verhalen. De raamver telling eindigt niet zoals je zou verwachten, maar heeft een open einde, zodat de

lezer in het ongewisse blijft. Een van de ingebedde verhalen gaat over modulatie in muziek – in dit geval een orgelwerk dat in de verkeerde toonsoort eindigt, zodat de luisteraar in het ongewisse blijft.

Hoofdstuk V: Recursieve structuren en processen. Het begrip recursie wordt in veel verschillende contexten voorgesteld: patronen in muziek, patronen in taal, meetkundige structuren, wiskundige functies, natuurkundige theorieën, computerprogramma's en andere.

Canon met intervallische vergroting. Achilles en de Schildpad proberen het volgende probleem op te lossen: 'Wat bevat meer informatie: een plaat, of de grammofoon die hem afspeelt?' Dit vreemde probleem ontstaat wanneer de Schildpad vertelt over een plaat die, op verschillende grammofoons afgespeeld, twee volkomen verschillende melodieën oplevert: B-A-C-H en C-A-G-E. Deze melodieën blijken echter, op bijzondere wijze, 'hetzelfde' te zijn.

Hoofdstuk VI: De lokatie van betekenis. Een uitvoerige behandeling van de manier waarop betekenis wordt onderverdeeld in gecodeerde boodschap, ontcijfering en ontvanger. Bij wijze van voorbeeld noem ik onder meer DNA-strengen, nog niet ontcijferde inscripties uit de oudheid en grammofoonplaten die de ruimte in worden geschoten. Er wordt een verband geoperd tussen intelligentie en 'absolute' betekenis.

Chromatische fantasie en furie. Een korte Dialoog die, afgezien van de titel, nauwelijks lijkt op Bachs *Chromatische fantasie en fuga*. Hij behandelt de juiste manier om zinnen zo te manipuleren dat de waarheid behouden blijft – en in het bijzonder de vraag of er regels bestaan voor het gebruik van het woord 'en'. Deze Dialoog vertoont veel overeenkomst met de Dialoog van Lewis Carroll.

Hoofdstuk VII: Propositielogica. Hierin wordt aangegeven hoe formele regels woorden als 'en' kunnen beheersen. Opnieuw komt isomorfie en de manier waarop symbolen in een dergelijk systeem automatisch betekenis krijgen ter sprake. Alle voorbeelden in dit Hoofdstuk zijn overigens 'Zenzinnen' – uitspraken ontleend aan Zen-koans. Ik koos deze opzettelijk, met ingehouden pret, omdat Zen-koans juist onlogische verhaaltjes zijn.

Kreeftcanon. Een Dialoog die berust op een stuk met dezelfde naam uit het *Musikalisches Opfer*. Ze heten beide zo omdat kreeften, zoals wordt beweerd, achteruit lopen. De Kreeft treedt in deze Dialoog voor het eerst op. Het is wellicht wat betreft formele kunstgrepen en stoeien met niveaus de meest geladen Dialoog in het boek. Gödel, Escher en Bach zijn in deze uiterst korte Dialoog sterk met elkaar verweven.

Hoofdstuk VIII: Theoria Numerorum Typografica. Hierin introduceer ik 'TNT', een uitbreiding van de Propositielogica. In TNT vindt getaltheoretisch redeneren plaats door middel van strenge manipulatie van symbolen. Verschillen tussen formeel redeneren en het menselijk denken worden overwogen.

Een MU-offer. Deze Dialoog loopt alvast vooruit op enkele nieuwe onderwerpen in het boek. Hoewel de Dialoog ogenschijnlijk Zen-boeddhisme en ko-

ans tot onderwerp heeft, gaat hij in feite amper verholen over het al dan niet stelling-zijn en de waarheid of onwaarheid van strengen in de getaltheorie. Er zijn terloopse toespelingen op de moleculaire biologie – met name de Genetische Code. Met het *Musikalisches Opfer* houdt de Dialoog geen nauw verband, afgezien van de titel en het spelen met zelf-referentie.

Hoofdstuk IX: Mumon en Gödel. Ik probeer over de merkwaardige ideeën van het Zen-boeddhisme te spreken. De Zen-monnik Mumon, die veel kansen van beroemde commentaren voorzag, is een centrale figuur. In zekere zin lijken Zen-ideeën overdrachtelijk op sommige moderne ideeën van de filosofie van de wiskunde. Na deze ‘Zennerij’ wordt Gödels fundamentele idee van de Gödelgetallen geïntroduceerd en geef ik een eerste overzicht van de Stelling van Gödel.

DEEL II: EGB

Praeludium & . . . Deze Dialoog gaat over in de volgende. Ze zijn beide gebaseerd op preludes en fuga’s in Bachs *Wohl Temperierte Clavier*. Achilles en de Schildpad komen de Kreeft een cadeau brengen. Deze heeft bezoek van de Miereneter. Het cadeau blijkt een plaatopname van het *Wohl Temperierte Clavier* te zijn. Ze zetten de plaat meteen op. Onder het luisteren naar een prelude praten ze over de structuur van preludes en fuga’s. Achilles vraagt zich daarbij af hoe je een fuga moet beluisteren: als een geheel, of als een som van delen? Dit is de discussie tussen holisme en reductionisme, die weldra in de . . . *Fuga formicalis* wordt voortgezet.

Hoofdstuk X: Beschrijvingsniveaus en computersystemen. Aan bod komen verschillende niveaus om schilderijen, schaakborden en computersystemen te beschouwen. Vervolgens ga ik dieper in op computersystemen. Daarbij beschrijf ik machinetalen, assembleertalen, compileertalen, besturingssystemen, enzovoort. Dan bespreek ik samengestelde systemen van een ander type, zoals sportteams, atoomkernen, atomen, het weer, enz. De vraag komt op hoeveel tussenliggende niveaus er zijn – als er van tussenliggende niveaus al sprake is.

. . . *Fuga formicalis*. Een nabootsing van een fuga in de muziek: alle stemmen zetten in met dezelfde opmerking. Het thema – holisme versus reductionisme – wordt gepresenteerd in de vorm van een recursieve prent die is samengesteld uit woorden die zijn samengesteld uit kleinere woorden, enz. De woorden die op de vier niveaus van deze merkwaardige prent verschijnen zijn: ‘HOLISME’, ‘REDUCTIONISME’ en ‘MU’. Al sprekende belanden we bij een vriendin van de miereneter, tante Myra Hoop, een mierenkolonie met bewustzijn. De verschillende niveaus van haar denkprocessen zijn onderwerp van het gesprek. In de Dialoog worden veel kunstgrepen van de fuga toegepast. Een aanwijzing voor de lezer: het gaat hierbij om trucjes die tegelijkertijd in de fuga op de plaat waarnaar ons viertal luistert voorkomen. Aan het slot van de . . . *Fuga formicalis* keren thema’s uit de *Praeludium &* . . . terug, zij het dan aanzienlijk getransformeerd.

Hoofdstuk XI: Hersenen en denken. 'Hoe kunnen gedachten door de hardware van de hersenen worden gedragen?' is het onderwerp van dit Hoofdstuk. Het begint met een overzicht van de grootschalige en kleinschalige structuur van de hersenen. Daarna speculeer ik wat diepgaander over het verband tussen begrippen en de activiteit van neuronen.

Engelse Nederlandse Franse Duitse Suite. Een interludium dat wordt gevormd door Lewis Carrolls nonsense-gedicht 'Jabberwocky', samen met drie vertalingen: een Franse en een Duitse uit de vorige eeuw en een nieuwe Nederlandse vertaling.

Hoofdstuk XII: Geest en denken. De voorafgaande gedichten werpen dwingend de vraag op of talen, of liever de geest van verschillende mensen, op elkaar kunnen worden 'afgebeeld'. Hoe is communicatie tussen twee fysiek afzonderlijke breinen mogelijk? Wat hebben alle menselijke breinen gemeen? Ik geef een geografische analogie die wellicht een antwoord biedt. De vraag dient zich aan: 'Kan een brein, in enige objectieve zin, door een buitenstaander worden begrepen?'

Aria met verschillende variaties. Een Dialoog die qua vorm is gebaseerd op Bachs *Goldberg-varianties*. De inhoud hangt samen met getaltheoretische problemen, zoals het Vermoeden van Goldbach. De voornaamste opzet van deze mengvorm is aan te tonen hoe de subtiliteit van de getaltheorie haar oorsprong vindt in het feit dat er vele verschillende variaties op het zoeken in een oneindige ruimte mogelijk zijn. Sommige voeren tot een oneindig zoekproces, andere bereiken een resultaat en zijn eindig, terwijl weer andere ertussenin zweven.

Hoofdstuk XIII: BluS, VluS en GluS. Dit zijn de namen van drie computertalen. BluS-programma's kunnen slechts voorspelbaar eindige zoekprocessen uitvoeren, terwijl VluS-programma's onvoorspelbaar eindige, of zelfs oneindige zoekprocessen kunnen uitvoeren. Dit Hoofdstuk is opgezet om een intuïtief besef te kweken van de begrippen primitief recursief en algemeen recursieve functies in de getaltheorie, die van wezenlijk belang zijn in het bewijs van Gödel.

Air op G's snaar. Een Dialoog waarin Gödels naar zichzelf verwijzende constructie in woorden wordt weerspiegeld. Het idee stamt van W.V.O. Quine. Deze Dialoog dient als prototype voor het volgende Hoofdstuk.

Hoofdstuk XIV: Over formeel onbeslisbare uitspraken van TNT en soortgelijke systemen. De titel van dit Hoofdstuk is een variant op de titel van Gödels artikel uit 1931 waarin zijn Onvolledigheidsstelling voor het eerst werd gepubliceerd. De twee voornaamste elementen van Gödels bewijs worden uitvoerig behandeld. Er wordt aangetoond hoe de veronderstelling dat TNT consistent is ons tot de conclusie dwingt dat TNT (of ieder soortgelijk systeem) onvolledig is. Ik bespreek relaties met Euclidische en niet-Euclidische meetkunde. Verder ga ik wat dieper in op gevolgen voor de filosofie van de wiskunde.

Verjaardagscantatata... Waarin Achilles de sluwe en skeptische Schildpad er niet van kan overtuigen dat het vandaag zijn (Achilles') verjaardag is. Zijn

herhaalde maar vruchteloze pogingen dit aan te tonen duiden al op de herhaalbaarheid van Gödels bewijsvoering.

Hoofdstuk XV: Buiten het systeem treden. De herhaalbaarheid van Gödels bewijsvoering wordt aangetoond met de implicatie dat TNT niet alleen onvolledig is, maar 'in wezen onvolledig'. Het tamelijk beruchte argument van J.R. Lucas dat erop neerkomt dat de Stelling van Gödel aantoonde dat het menselijk denken geenszins 'mechanisch' kan zijn, wordt gewogen en te licht bevonden.

Opbouwende gedachten van een tabakroker. Een Dialoog die veel onderwerpen aansnijdt. De nadruk ligt op problemen met betrekking tot zelf-replicatie en zelf-referentie. Onder de gebruikte voorbeelden zien we televisiecamera's die tv-schermen opnemen en virussen en andere subcellulaire organismen die zichzelf samenstellen. De titel is afkomstig van een gedicht van J.S. Bach, dat hier op een eigenaardige manier opduikt.

Hoofdstuk XVI: Zelf-ref en zelf-ref. Dit Hoofdstuk handelt over zelf-referentie in haar diverse gedaanten en zelfreproducerende eenheden (bijv. computerprogramma's of DNA-moleculen). Het verband tussen een zelfreproducerende eenheid en de mechanismen die zich erbuiten bevinden met behulp waarvan zij zich reproduceert (bijv. een computer of eiwitten) wordt besproken - in het bijzonder de vaagheid van dit onderscheid tussen binnen en buiten. Het centrale onderwerp van dit Hoofdstuk is de manier waarop informatie tussen de verschillende niveaus van zulke systemen verloopt.

Het magnifieke Kreeft-idee. De titel is een woordspeling op Bachs *Magnificat in D*. De Dialoog gaat over de Kreeft die voorgeeft over magische onderscheidingskracht te beschikken om te bepalen of getaltheoretische uitspraken waar zijn of onwaar, door ze als muziekstukken op te vatten, ze op zijn fluit te spelen en dan te bepalen of ze al dan niet 'mooi' zijn.

Hoofdstuk XVII: Church, Turing, Tarski en anderen. De fictieve Kreeft uit de voorgaande Dialoog wordt door enkele echte mensen met verbluffende wiskundige gaven vervangen. De Church-Turing These, die geestesactiviteit met mechanisch rekenen in verband brengt, wordt in enkele versies van verschillende sterkte gepresenteerd. Alle versies worden onder de loep genomen, met name wat betreft hun gevolgen voor het mechanisch simuleren van menselijk denken, of het in een machine programmeren van het vermogen schoonheid te herkennen of te scheppen. De verbinding tussen hersenactiviteit en mechanisch rekenen leidt tot enkele andere onderwerpen: het Stopprobleem van Turing en de Waarheidsstelling van Tarski.

SHRDLU, wil mij uw vreugde tonen. Deze Dialoog ontleen ik aan een artikel waarin Terry Winograd zijn programma SHRDLU beschrijft. Ik heb alleen een paar namen veranderd. In de Dialoog communiceert een programma in zeer indrukwekkende omgangstaal met een mens over de zogeheten 'blokjeswereld'. Het computerprogramma lijkt - binnen zijn begrensde wereld - van enig echt begrip blijkt te geven. De titel van de Dialoog is gebaseerd op de koraal *Jesu, bleibet meine Freude* uit Cantate 147 van J.S. Bach.

Hoofdstuk XVIII: Artificiële Intelligentie: een terugblik. Dit Hoofdstuk begint met een behandeling van de beroemde 'Turingtest' – een voorstel van de pionier van de informatica, Alan Turing, voor een methode om de aanwezigheid of het ontbreken van 'denken' in een machine te ontdekken. Van daaruit gaan we verder met een beknopte geschiedenis van de Artificiële Intelligentie. Deze bestrijkt programma's die – tot op zekere hoogte – spelletjes spelen, stellingen bewijzen, problemen oplossen, muziek componeren, wiskundevraagstukken uitwerken en 'natuurlijke talen' gebruiken.

Contrafactus. Over hoe we onbewust onze gedachten zo ordenen dat we ons ten allen tijde hypothetische varianten van de werkelijkheid kunnen voorstellen. De Dialoog gaat ook over afwijkende varianten van dit vermogen – wat bijvoorbeeld tot uiting komt in een nieuwe figuur, de Ai, die een hartschotelijk liefhebber is van frietjes en een hartgrondig hater van alles wat contrafactisch is.

Hoofdstuk XIX: Artificiële Intelligentie: vooruitzichten. De voorgaande Dialoog leidt tot een bespreking van de wijze waarop kennis in contextlagen gerepresenteerd is. Van daaruit komen we bij de moderne AI-opvatting van 'kaders'. Bij wijze van concreet voorbeeld geef ik een van kaders gebruik makende methode om een verzameling van puzzels voor visuele patroonherkenning te benaderen. Dan wordt het diepgaande thema van de wisselwerking van begrippen in het algemeen behandeld, wat tot enkele speculaties over creativiteit voert. Ik rond het Hoofdstuk af met een aantal algemene 'Vragen en speculaties' over Artificiële Intelligentie en denken.

Canon in aïs. Een canon die een canon van Bach nabootst waarin een stem dezelfde melodie als een andere speelt, alleen ondersteboven en tweemaal zo langzaam, terwijl een derde stem vrij is. Hier spreekt de Ai dezelfde woorden als de Schildpad, alleen in ontkennende vorm (vrij opgevat) en tweemaal zo traag, terwijl Achilles vrij is.

Hoofdstuk XX: Merkwaardige Lussen, of Verstrengelde Hiërarchieën: het hart van AI. Een groot resumé van vele van de ideeën over hiërarchische systemen en zelf-referentie. Het Hoofdstuk gaat in op de warwinkel die ontstaat als systemen naar zichzelf teruggrijpen – bijvoorbeeld wetenschap die wetenschap toetst, een regering die haar eigen misstappen onderzoekt, kunst die de regels van de kunst schendt en, tenslotte, mensen die over hun eigen hersenen en geest denken. Heeft de Stelling van Gödel iets over deze laatste warwinkel te zeggen? Houden vrije wil en het besef van bewustzijn verband met de Stelling van Gödel? Een laatste verbinding tussen Gödel, Escher en Bach rondt het Hoofdstuk af.

Zesstemmige Ricercar. Deze Dialoog is een uitbundig spel met veel van de ideeën die in dit boek opborrelen. Het verhaal van het *Musikalisches Opfer* dat het boek opende, wordt opnieuw geënceneerd. De Dialoog vormt tegelijkertijd een 'vertaling' in woorden van het meest complexe stuk in het *Musikalisches Opfer*, de 'Ricercar a 6'. Dit dualisme verleent de Dialoog meer betekenisniveaus dan alle andere in het boek. De plaats van Frederik de Grote wordt door de Kreeft ingenomen, piano's worden vervangen door computers, enz. Er zijn veel verrassingen. De inhoud van de Dialoog

omvat problemen van geest, bewustzijn, vrije wil, Artificiële Intelligentie, de Turingtest, enzovoort, die eerder in het boek werden besproken. De Dialoog besluit met een impliciete verwijzing naar het begin van het boek, zodat het boek één grote, naar zichzelf verwijzende lus wordt, die tegelijkertijd Bachs muziek, Eschers prenten en de Stelling van Gödel symboliseert.