HOOFDSTUK

1

Spanning

Ga naar www.pearsonmylab.nl voor studiemateriaal en toetsen om je begrip en kennis van dit hoofdstuk uit te breiden en te oefenen. Ook vind je daar videouitwerkingen bij verschillende opgaven uit het boek.

Doelstellingen van dit hoofdstuk

- In dit hoofdstuk worden enkele belangrijke principes van de statica behandeld en wordt getoond hoe deze worden gebruikt om de inwendige resulterende belastingen in een lichaam te bepalen. Daarna introduceren we de principes normaalspanning en schuifspanning en bespreken we specifieke toepassingen van het analyseren en ontwerpen van onderdelen die belasting in axiale richting of directe afschuiving ondervinden.

1.1 Inleiding

De ***sterkteleer*** is de tak van de mechanica die de effecten bestudeert van spanning en vervorming in een vervormbaar lichaam dat wordt blootgesteld aan een uitwendige belasting. Spanning hangt samen met de sterkte van het materiaal waarvan het lichaam is vervaardigd, terwijl vervorming een maat is voor de vormverandering van het lichaam. Daarnaast omvat de sterkteleer ook het bestuderen van de stabiliteit van lichamen wanneer een dergelijk lichaam, zoals een kolom, een drukbelasting ondergaat. Het is heel belangrijk de principes van dit onderwerp goed te begrijpen, omdat veel formules en ontwerpregels in constructievoorschriften zijn gebaseerd op de principes van de sterkteleer.

Historische ontwikkeling De sterkteleer dateert uit het begin van de zeventiende eeuw, toen Galilei experimenten uitvoerde waarbij hij de effecten van het belasten van staven en balken van uiteenlopend materiaal bestudeerde. Aan het begin van de achttiende eeuw verbeterden de experimentele methoden voor het beproeven van materialen echter sterk en in die tijd werden op grote schaal zowel experimentele als theoretische onderzoeken uitgevoerd. Dit gebeurde voornamelijk in Frankrijk, door vooraanstaande figuren als Saint-Venant, Poisson, Lamé en Navier.

In de loop van de tijd, nadat veel fundamentele problemen van de sterkteleer waren opgelost, kwam men voor ingewikkelder vraagstukken te staan, die alleen konden worden opgelost met behulp van geavanceerde wiskundige en computertechnieken. Het gevolg was dat dit onderwerp werd uitgebreid naar andere onderwerpen van de mechanica, zoals de *elasticiteitstheorie* en de *plasticiteitstheorie*. Er wordt nog steeds onderzoek in deze vakgebieden gedaan om te kunnen voldoen aan de vraag naar oplossingen voor moeilijke constructieproblemen.

1.2 Evenwicht van een vervormbaar lichaam

Omdat bij het ontwikkelen en toepassen van de sterkteleer de statica een belangrijke rol speelt, is een goed begrip van de principes erg belangrijk. Daarom wordt eerst stilgestaan bij een paar van de belangrijkste principes van de statica die door het hele boek heen worden gebruikt.

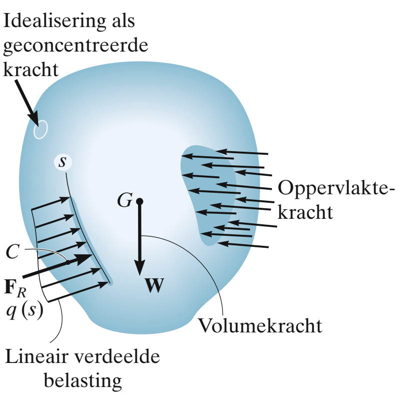


Fig. 1.1

Uitwendige belastingen Een lichaam ondergaat slechts twee soorten uitwendige belastingen: oppervlaktekrachten en/of volumekrachten, fig. 1.1.

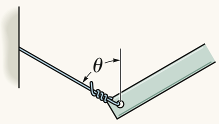
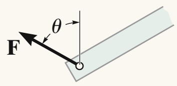
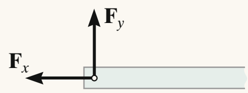
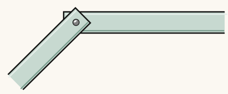
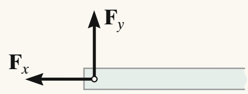
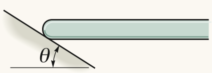
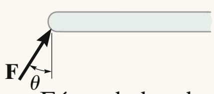
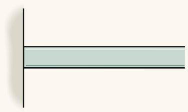
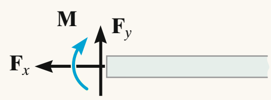
Oppervlaktekrachten ***Oppervlaktekrachten*** ontstaan door direct contact van een lichaam met een ander lichaam. In alle gevallen worden deze krachten verdeeld over het *contactoppervlak* tussen de lichamen. Als deze oppervlakte klein is ten opzichte van de totale oppervlakte van het lichaam, kan de oppervlaktekracht worden *geïdealiseerd* als één ***geconcentreerde kracht***, die op een *punt* van het lichaam wordt uitgeoefend. De kracht die de grond op de wielen van een fiets uitoefent bijvoorbeeld, kan worden beschouwd als een geconcentreerde kracht. Als de oppervlaktebelasting op een smal stripvormig oppervlak wordt uitgeoefend, kan de belasting worden *geïdealiseerd* als een ***lineair verdeelde belasting***, $q(s)$. Hier wordt de belasting gemeten per lengte-eenheid langs de strip en grafisch weergegeven als een reeks pijlen langs de lijn s. ***De resulterende kracht*** $\mathbf{F}_R$ ***van*** $q(s)$ ***is gelijk aan de oppervlakte onder de kromme van de verdeelde belasting en deze resultante werkt in het zwaartepunt C, het geometrische middelpunt van dit oppervlak.*** De belasting over de lengte van een balk is een typisch voorbeeld van een situatie waarin deze idealisering vaak wordt toegepast.

Volumekrachten Een ***volumekracht*** ontstaat wanneer een lichaam een kracht uitoefent op een ander lichaam zonder dat er sprake is van direct fysiek contact tussen de lichamen. Voorbeelden hiervan zijn de effecten die worden veroorzaakt door de zwaartekracht of het elektromagnetische krachtveld van de aarde. Hoewel volumekrachten invloed hebben op alle deeltjes waaruit het lichaam bestaat, worden deze krachten gewoonlijk voorgesteld door één enkele geconcentreerde kracht die op het lichaam werkt. In het geval van de zwaartekracht wordt deze kracht het ***gewicht*** van het lichaam genoemd; deze kracht grijpt aan in het zwaartepunt van het lichaam.

Ondersteuningsreacties De oppervlaktekrachten in de ondersteuningen van een lichaam of in het contactpunt tussen twee lichamen worden ***reacties*** genoemd. Voor tweedimensionale problemen, dat wil zeggen lichamen met krachtsystemen in één vlak, toont tabel 1.1 de meest voorkomende ondersteuningen. Onthoud goed welk symbool elke ondersteuning voorstelt en welk type reacties deze uitoefent op het rakende onderdeel. Als vuistregel geldt dat ***als de ondersteuning translatie in een bepaalde richting verhindert, er in die richting een kracht op het onderdeel moet worden uitgeoefend. Op dezelfde manier geldt dat wanneer rotatie wordt verhinderd, er een koppel op het onderdeel moet worden uitgeoefend.*** Zo verhindert bijvoorbeeld de roloplegging alleen translatie in de contactrichting, loodrecht op het oppervlak. De rol oefent daardoor ter plaatse van zijn contactpunt een normaalkracht **F** op het onderdeel uit. Omdat het onderdeel vrij om de rol kan roteren, kan de rol in het contactpunt geen koppel op het onderdeel uitoefenen.

Veel machine-elementen worden met pennen met elkaar verbonden, zodat ze in de verbindingen vrij kunnen draaien. Deze ondersteuningen oefenen wel een kracht uit op de machine-elementen, maar geen moment.

Tabel 1.1

Type verbinding	Reactie	Type verbinding	Reactie
 Kabel	 Eén onbekende: F	 Uitwendig scharnier	 Twee onbekenden: F_x, F_y
 Roloplegging	 Eén onbekende: F	 Inwendig scharnier	 Twee onbekenden: F_x, F_y
 Gladde ondersteuning	 Eén onbekende: F	 Inklemming	 Drie onbekenden: F_x, F_y, M

Evenwichtsvergelijkingen Evenwicht van een lichaam vereist zowel een ***krachtenevenwicht***, om te voorkomen dat het lichaam over een recht of gebogen pad wordt verplaatst, als een ***momentenevenwicht***, om roteren van het lichaam te verhinderen. Deze voorwaarden kunnen wiskundig worden uitgedrukt met twee vectorvergelijkingen:

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma\mathbf{F} &= \mathbf{0}\\ \Sigma\mathbf{M}_O &= \mathbf{0}\end{aligned}} \qquad (1.1)$$

Hier vertegenwoordigt $\Sigma\mathbf{F}$ de som van alle krachten die op het lichaam werken en is $\Sigma\mathbf{M}_O$ de som van de momenten van alle krachten rond een willekeurig punt O, al dan niet op het lichaam. Als er een x–y–z-assenstelsel wordt gekozen met de oorsprong in punt O, kunnen de kracht- en momentvectoren worden ontbonden in componenten langs de coördinaatassen en kunnen de twee bovenstaande vergelijkingen in scalaire vorm worden geschreven als zes vergelijkingen:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma F_y = 0 & \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 & \Sigma M_y = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array}} \tag{1.2}$$

Om de horizontale elementen van de draagstructuur van dit gebouw te ontwerpen moeten eerst de inwendige belastingen in verschillende punten op de lengte ervan bekend zijn.

In de praktijk kan de belasting van een lichaam vaak worden voorgesteld als een stelsel van *krachten die in hetzelfde vlak werken*. Als dit het geval is en de krachten in het x–y-vlak liggen, kunnen de voorwaarden voor evenwicht van het lichaam worden weergegeven met slechts drie scalaire evenwichtsvergelijkingen, namelijk

$$\boxed{\begin{array}{r} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_O = 0 \end{array}} \tag{1.3}$$

Hier worden alle momenten om punt O opgeteld, zodat ze in de richting van de z-as werken.

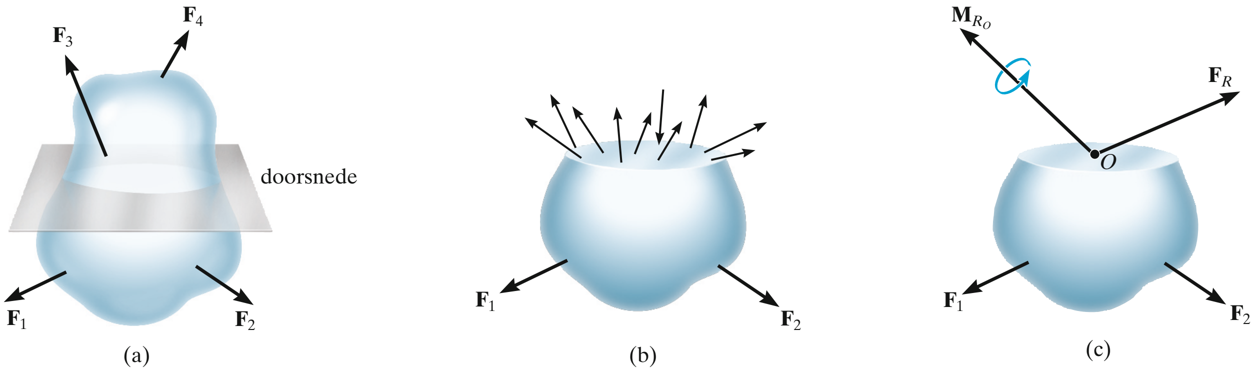
Om de evenwichtsvergelijkingen met succes te kunnen toepassen moeten alle bekende en onbekende krachten die *op* het lichaam werken in kaart gebracht worden. ***De beste manier om dat te doen is eerst het vrijlichaamsschema van het lichaam te tekenen.***

Het gewicht van dit verkeersbord en de windbelastingen die erop werken veroorzaken normaal- en afschuifkrachten en buig- en wringmomenten in de dragende kolom.

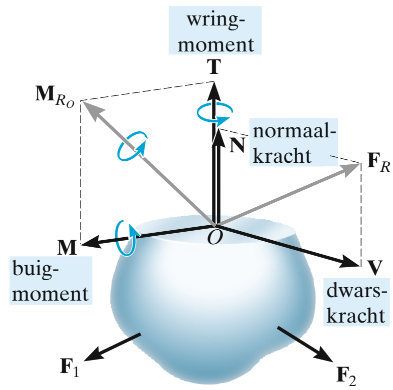
Inwendige belastingen In de sterkteleer wordt statica met name gebruikt om de resulterende belastingen binnen een lichaam te bepalen. Bekijk als voorbeeld het lichaam in fig. 1.2*a*, dat door de vier uitwendige krachten in evenwicht wordt gehouden.* Om de inwendige belastingen die in een bepaald oppervlak in het lichaam werken te bepalen, is het nodig om een denkbeeldige ‘snede’ te maken door het gebied waar de inwendige belastingen moeten worden bepaald. De twee delen van het lichaam worden vervolgens gescheiden en van een van de delen wordt een vrijlichaamsschema getekend, fig. 1.2*b*. Merk op dat er in wezen sprake is van een verdeling van inwendige krachten die op het ‘zichtbare’ gedeelte van de doorsnede werken. Deze krachten vertegenwoordigen de werking van het materiaal van het bovenste deel op het aangrenzende materiaal van het onderste deel van het lichaam.

Hoewel de exacte verdeling van deze inwendige belasting *onbekend* kan zijn, kunnen we de evenwichtsvergelijkingen gebruiken om de uitwendige

* Het gewicht van het lichaam is niet aangegeven, omdat wordt aangenomen dat dit heel klein is; hierdoor kan het, vergeleken met de andere krachten, worden verwaarloosd.



krachten op het lichaam te relateren aan de *resulterende kracht en het resulterende moment*, $\mathbf{F}_R$ en $\mathbf{M}_{R_O}$, die door deze verdeling op een bepaald punt O in het oppervlak van de doorsnede worden uitgeoefend (zie fig. 1.2*c*). Verderop laten we zien dat punt O heel vaak wordt gekozen in het *zwaartepunt* van het oppervlak van de doorsnede en dus zullen we, tenzij anders aangegeven, altijd deze plaats voor O kiezen. Verder wordt, als een onderdeel lang en dun is, zoals bij een staaf of een balk, de te bekijken doorsnede in het algemeen *loodrecht* op de lengteas van het onderdeel gekozen. Deze doorsnede wordt dan aangeduid met de term ***dwarsdoorsnede***.



(d)

Fig. 1.2

Drie richtingen Verderop in dit boek zullen we laten zien hoe de resulterende belastingen, $\mathbf{F}_R$ en $\mathbf{M}_{R_O}$, kunnen worden gerelateerd aan de *krachtenverdeling* in het vlak van de doorsnede en daarbij vergelijkingen afleiden die gebruikt kunnen worden voor analyses en ontwerpen. Om dit echter te kunnen doen moeten we de componenten van $\mathbf{F}_R$ en $\mathbf{M}_{R_O}$ bekijken die rakend aan en loodrecht op het vlak van de doorsnede werken, fig. 1.2*d*. We kunnen op de volgende manier vier verschillende soorten resulterende belastingen definiëren:

Normaalkracht, N Deze kracht werkt loodrecht op het oppervlak. Deze kracht wordt ontwikkeld als de uitwendige belastingen drukken op of trekken aan de twee segmenten van het lichaam.

Dwarskracht, V De dwarskracht werkt in het vlak van de doorsnede en wordt ontwikkeld als de uitwendige belastingen de twee segmenten van het lichaam over elkaar heen willen schuiven.

Wringmoment, T Een wringmoment wordt ontwikkeld als uitwendige belastingen het ene segment van het lichaam ten opzichte van het andere segment om een as loodrecht op het oppervlak willen verdraaien.

Buigmoment, M Een buigmoment wordt veroorzaakt als uitwendige belastingen het lichaam willen verbuigen om een as binnen het vlak van de doorsnede.

In dit boek wordt een moment of koppel in drie dimensies weergegeven als een vector met een krul eromheen. Volgens de *rechterhandregel* geeft de

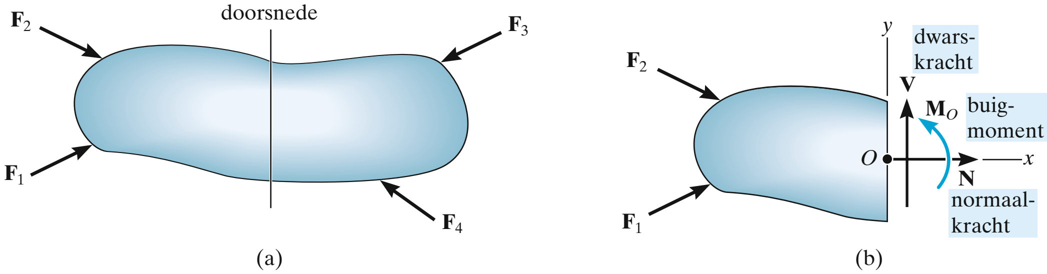


Fig. 1.3

duim de richting aan waarin de pijlpunt wijst en geven de gekromde vingers de draairichting aan (wringing of buiging).

Belastingen in één vlak Als het lichaam wordt blootgesteld aan een *stelsel van krachten in één vlak*, fig. 1.3*a*, zal de doorsnede uitsluitend belast kunnen worden door drie van de vier componenten, te weten de normaalkracht, de dwarskracht en het buigmoment, fig. 1.3*b*. Als we de coördinaatassen x, y en z gebruiken, zoals is weergegeven voor het linkersegment, kan **N** direct worden bepaald door $\Sigma F_x = 0$ toe te passen en kan **V** rechtstreeks worden bepaald met behulp van $\Sigma F_y = 0$. Het buigmoment $\mathbf{M}_O$ ten slotte kan direct worden bepaald door de momenten om punt O (de z-as), $\Sigma M_O = 0$, op te tellen, om zo de momenten die worden veroorzaakt door de onbekenden **N** en **V** te elimineren.

Om te onthouden!

- De *sterkteleer* bestudeert de relatie tussen de uitwendige belastingen die op een lichaam worden uitgeoefend en de spanning en vervorming als gevolg van de inwendige belastingen binnen het lichaam.
- Uitwendige krachten kunnen op een lichaam werken als *verdeelde* of *geconcentreerde oppervlaktebelastingen*, of als *volumekrachten* die binnen het volume van het lichaam werken.
- Lineair verdeelde belastingen leveren een *resulterende kracht* met een *grootte* die gelijk is aan de *oppervlakte onder het belastingdiagram* die aangrijpt in het *zwaartepunt* van dit gebied.
- Een ondersteuning levert een *kracht* in een bepaalde richting aan het lichaam dat eraan bevestigd is als het *translatie van dat lichaam in die richting voorkomt*, en levert een *moment* op het lichaam als het een *rotatie ervan voorkomt*.
- Om te voorkomen dat een lichaam versneld gaat transleren of roteren, moet voldaan worden aan de evenwichtsvergelijkingen $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en $\Sigma\mathbf{M} = \mathbf{0}$.
- Wanneer de evenwichtsvergelijkingen worden toegepast, is het belangrijk om eerst het vrijlichaamsschema van het lichaam te tekenen om alle termen in de vergelijkingen in kaart te brengen.
- De snedemethode wordt gebruikt om de inwendige resulterende belastingen te berekenen die werken op het oppervlak van het doorgesneden lichaam. Over het algemeen bestaan deze resultanten uit een normaalkracht, een dwarskracht, een wringmoment en een buigmoment.

Analyseprocedure

De resulterende *inwendige* belastingen op een punt in een dwarsdoorsnede van een lichaam kunnen worden bepaald met behulp van de snedemethode. Hiervoor moeten de volgende stappen worden uitgevoerd:

Ondersteuningsreacties

- Beslis eerst welk segment van het lichaam moet worden bekeken. Als het segment wordt ondersteund door een ander lichaam of een verbinding daarmee heeft, moeten *voordat* de doorsnede van het lichaam wordt gemaakt, de ondersteuningsreacties op het gekozen segment van het lichaam bepaald worden. Teken daarvoor het vrijlichaamsschema van het *gehele lichaam* en stel vervolgens de benodigde evenwichtsvergelijkingen op om deze reacties te bepalen.

Vrijlichaamsschema

- Houd alle uitwendige verdeelde belastingen, koppels, wringmomenten en krachten die op het lichaam werken *precies op hun plaats* alvorens een denkbeeldige doorsnede in het lichaam te maken op het punt waar de inwendige resulterende krachten bepaald moeten worden.
- Teken een vrijlichaamsschema van een van de ‘afgesneden’ segmenten en geef de onbekende resultanten **N**, **V**, **M** en **T** van de doorsnede aan. In de meeste gevallen worden deze resultanten geplaatst op het punt dat het geometrische middelpunt of *zwaartepunt* van het doorsnedeoppervlak vertegenwoordigt.
- Als het onderdeel wordt belast door een *stelsel van krachten in één vlak*, werken alleen **N**, **V** en **M** in het zwaartepunt.
- Teken het x–y–z-assenstelsel in het zwaartepunt en laat zien wat de resulterende inwendige belastingen zijn die langs de assen werken.

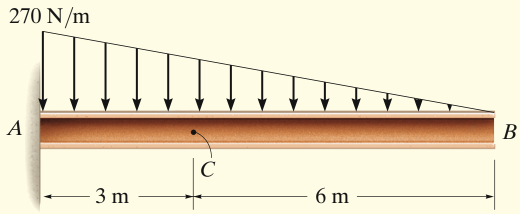
Evenwichtsvergelijkingen

- Momenten moeten ter plaatse van de doorsnede worden opgeteld, om de assen waarlangs de resultanten werken. Door dit te doen worden de onbekende krachten **N** en **V** geëlimineerd en wordt een directe oplossing voor **M** (en **T**) mogelijk.
- Als de evenwichtsvergelijkingen een negatieve waarde voor een resultante opleveren, is de *werkrichting* van de resultante *tegengesteld* aan de richting die in het vrijlichaamsschema is weergegeven.

De volgende voorbeelden geven een numerieke illustratie van deze procedure en vormen tevens een herhaling van enkele belangrijke staticaprincipes.

Voorbeeld 1.1

Bepaal de resulterende inwendige belastingen die in de dwarsdoorsnede in punt C van de balk in fig. 1.4*a* werken.



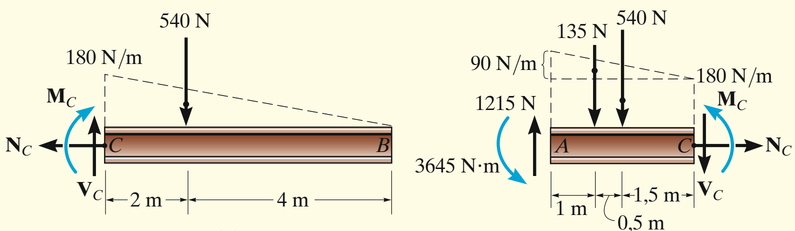
(a)

Fig. 1.4

OPLOSSING

Ondersteuningsreacties We hoeven de ondersteuningsreacties bij A niet te bepalen als we alleen segment CB beschouwen.

Vrijlichaamsschema Het vrijlichaamsschema van segment CB is weergegeven in fig. 1.4*b*. Het is belangrijk om de verdeelde belasting op het segment te houden tot *na* de doorsnede is gemaakt. Alleen dan mag deze belasting worden vervangen door één resulterende kracht. We zien dat de grootte van de verdeelde belasting in C wordt bepaald door evenredigheid: uit fig. 1.4*a* blijkt dat $q/6$ m = (270 N/m)/9 m, zodat q = 180 N/m. De grootte van de resultante van de verdeelde belasting is gelijk aan de oppervlakte onder de belastingskromme (de driehoek) en werkt door het zwaartepunt van dit oppervlak. Zodoende is F = 1/2(180 N/m)(6 m) = 540 N en werkt op een afstand 1/3(6 m) = 2 m van C, zoals is weergegeven in fig. 1.4*b*.



(b) (c)

Evenwichtsvergelijkingen Als we de evenwichtsvergelijkingen toepassen, levert dat

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \qquad -N_C = 0$$

$$N_C = 0 \qquad \textit{Antw.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V_C - 540\text{ N} = 0$$

$$V_C = 540\text{ N} \qquad \textit{Antw.}$$

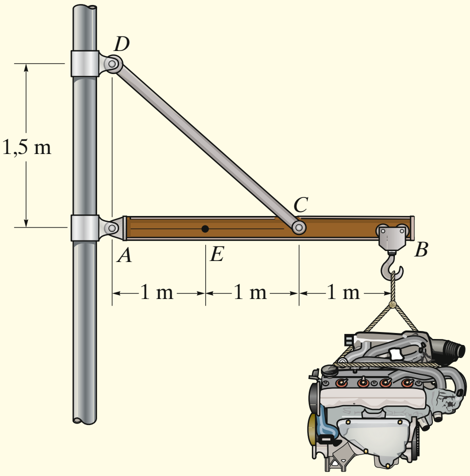
$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \qquad -M_C - 540\text{ N}(2\text{ m}) = 0$$

$$M_C = -1080\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Antw.}$$

OPMERKING: Het minteken geeft aan dat $\mathbf{M}_C$ in tegengestelde richting van het koppel in het vrijlichaamsschema werkt. Probeer dit probleem voor segment AC op te lossen door eerst de ondersteuningsreacties in A te bepalen; deze zijn weergegeven in fig. 1.4*c*.

Voorbeeld 1.2

De motor met een massa van 500 kg is opgehangen aan de giek in fig. 1.5*a*. Bepaal de resulterende inwendige belastingen in de dwarsdoorsnede van de giek in punt E.



(a)

Fig. 1.5

OPLOSSING

Ondersteuningsreacties We beschouwen segment AE van de giek, zodat we eerst de scharnierreacties bij A moeten bepalen. Merk op dat op CD twee krachten werken. In fig. 1.5*b* is het vrijlichaamsschema weergegeven van de giek. Als we de evenwichtsvergelijkingen toepassen, levert dat

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \qquad F_{CD}\left(\tfrac{3}{5}\right)(2\text{ m}) - [500(9{,}81)\text{ N}](3\text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = 12\,262{,}5\text{ N}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad A_x - (12\,262{,}5\text{ N})\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0$$

$$A_x = 9810\text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -A_y + (12\,262{,}5\text{ N})\left(\tfrac{3}{5}\right) - 500(9{,}81)\text{ N} = 0$$

$$A_y = 2452{,}5\text{ N}$$

Vrijlichaamsschema Het vrijlichaamsschema van segment AE is weergegeven in fig. 1.5c.

Evenwichtsvergelijkingen

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad N_E + 9810\text{ N} = 0$$

$$N_E = -9810\text{ N} = -9{,}81\text{ kN} \qquad \textit{Antw.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -V_E - 2452{,}5\text{ N} = 0$$

$$V_E = -2452{,}5\text{ N} = -2{,}45\text{ kN} \qquad \textit{Antw.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_E = 0; \qquad M_E + (2452{,}5\text{ N})(1\text{ m}) = 0$$

$$M_E = -2452{,}5\text{ N}\cdot\text{m} = -2{,}45\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Antw.}$$

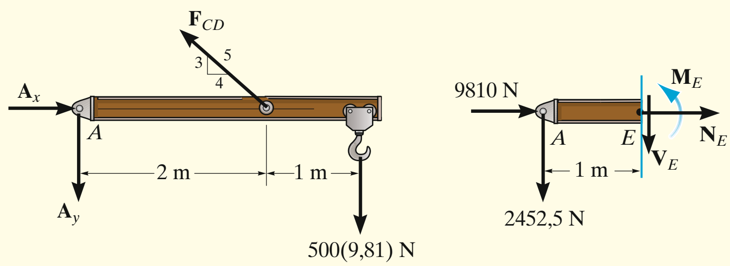


Fig. 1.5 (vervolg)

Voorbeeld 1.3

Bepaal de resulterende inwendige belastingen die in G in de dwarsdoorsnede van de balk werken (fig. 1.6a). Elke verbinding is scharnierend.

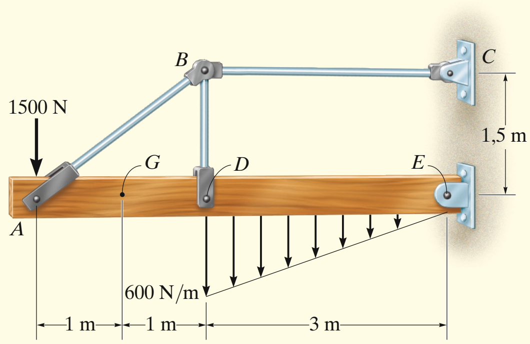


Fig. 1.6