Deel A

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Sieb Kemme, Theo van Pelt,
Jacques Timmers & Gooitzen Zwanenburg

3e druk

Noordhoff

Wiskunde voor het hoger onderwijs

Deel A

Sieb Kemme (red.)
Theo van Pelt
Jacques Timmers
Gooitzen Zwanenburg

Derde druk

Noordhoff

Ontwerp omslag: Getty Images
Omslagillustratie: Shootmedia

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Hoger Onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 23

ISBN(ebook) 978-90-01-27768-0
ISBN 978-90-01-27767-3
NUR 918

Woord vooraf

Bij effectief onderwijs hoort de mogelijkheid om snel en actief over de belangrijkste informatie te kunnen beschikken. 'Maak kort en kernachtig duidelijk waar het om gaat en ga direct op het doel af.' Met die gedachte is het studiemateriaal van Wiskunde voor het hoger onderwijs ontwikkeld.

De serie Wiskunde voor het hoger onderwijs is opgebouwd uit de delen A en B. Deel A bevat de nodige elementaire wiskundige kennis en vaardigheden die nodig zijn voor een technische studie op het hbo. De eerste drie hoofdstukken bevatten basisconcepten en vaardigheden en maken een aansluiting mogelijk met het mbo-niveau. In deze editie is bijzonder veel aandacht besteed aan realistische toepassingen van wiskunde in de techniek. Deel B biedt, naast een uitbreiding van het wiskundige arsenaal, een steviger wiskundige basis.

De kern van dit deel A bestaat uit de theorie en de oefeningen. De linkerbladzijden zijn meestal gereserveerd voor de theorie en de rechterbladzijden voor de bijbehorende oefeningen. Theorie en oefeningen blijven zo dicht bij elkaar. Dit maakt een zelfstandige en actieve manier van studeren mogelijk.
Elk hoofdstuk begint met een open toepassingsvraagstuk als een introductie op de leerstof van het hoofdstuk vanuit een realistische toepassing. Elk vraagstuk leent zich voor een klassikale bespreking.
Een hoofdstuk sluit af met een paragraaf Toepassen. In de paragraaf Hoofdzaken staan de onderwerpen die aan het eind van het hoofdstuk paraat moeten zijn. Met een toets over het hele hoofdstuk kan zelfstandig worden nagegaan in hoeverre de stof daadwerkelijk beheerst wordt.

Bij zelfstudie is de mogelijkheid om jezelf te kunnen controleren en corrigeren essentieel. Dat kan alleen als er complete uitwerkingen per oefening beschikbaar zijn. De uitwerkingen op de website voorzien daarin.

Ondersteuning met ICT
Met een inlogcode krijgt de student toegang tot de website waarop deze uitwerkingen te vinden zijn. Ook kan de student hier de toetsvragen per hoofdstuk oefenen plus extra opdrachten maken. Daarbij ontvangt hij tips en feedback om uiteindelijk zelfstandig tot de goede antwoorden te komen.

Inhoud

DEEL 2
Functies en grafieken 77

DEEL 1
Rekenen, algebra en meetkunde

1 Rekenen

Eerst btw eraf en daarna de korting of andersom?
Op een artikel kun je 25% korting krijgen. Bij dat artikel moet je 21% btw betalen.
Wat is voor jou voordeliger: eerst de korting eraf en daarna de btw erbij of eerst de btw erbij en daarna de korting eraf?
- Probeer het uit te rekenen met getallenvoorbeelden.
- Neem ook andere percentages voor btw en korting.
- Wat is je conclusie?
- Geef een onderbouwing voor je conclusie.

Hoeveel meter bij één keer rond?
Een wielrenner rijdt met een verzet van 53 : 14. Dat zijn 53 tanden op het voorste tandwiel en 14 op het achterste. De doorsnede van het racewiel is 27 inch (1 inch is 2,54 cm).
- Hoe vaak gaat het achterste tandwiel rond bij één keer een ronding van het voorste?
- Wat is de omtrek van een wiel in meters?
- Hoeveel meter legt de wielrenner af bij één keer de pedalen rond?

(Uit: De Rekenkalender, IOWO, Utrecht, 1979)

1.1 Rekenregels

Maalteken (×) of punt (·)?

In de wiskunde is het gebruikelijk om voor een vermenigvuldiging in plaats van een maalteken (×) een punt (·) te gebruiken. Soms wordt die punt weggelaten.
Dus: $a \times b = a \cdot b = \text{ab}$.

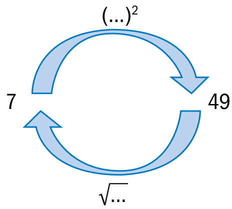
Rekenvolgorde

Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken en machtsverheffen zijn **rekenkundige bewerkingen**. Bij een berekening waarin verschillende bewerkingen voorkomen, voer je deze bewerkingen uit in de juiste volgorde.
Deze volgorde is:

1. Uitrekenen wat tussen haakjes staat.
2. Machtsverheffen en worteltrekken.
3. Vermenigvuldigen en delen in de volgorde waarin ze staan.
4. Optellen en aftrekken in de volgorde waarin ze staan.

Het wortelteken

Worteltrekken is de omgekeerde bewerking van kwadraat nemen, dus: $7^2 = 49$ en $\sqrt{49} = 7$.
De bewerkingen heffen elkaar op: $\sqrt{7^2} = 7$ en $(\sqrt{7})^2 = 7$.
$\sqrt{5^2 + 12^2}$ is hetzelfde als $\sqrt{(5^2 + 12^2)}$. De grote streep boven de wortel geldt als haakjes.
Je rekent dus eerst uit wat onder de wortelstreep staat.
Daarom is: $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.



Voorbeelden

1	$2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$	Je doet eerst de vermenigvuldiging.
2	$(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$	Eerst reken je uit wat tussen haakjes staat.
3	$2 + 3 - 4 = 5 - 4 = 1$	Je rekent in de volgorde waarin het staat.
4	$10 : 2 \times 4 = 5 \times 4 = 20$	Ook nu reken je in de volgorde waarin het staat.
5	$2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$	De machten reken je eerst uit.
6	$(4 \times 3)^2 = 12^2 = 144$	Bereken eerst wat tussen haakjes staat.
7	$4 \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$	Eerst de wortel uitrekenen.
8	$\sqrt{(4 \times 9)} = \sqrt{36} = 6$	Bereken eerst wat tussen haakjes staat.
9	$\sqrt{4} \times 9 = 2 \times 9 = 18$	Wortelteken staat alleen boven de 4.

OEFENINGEN

1 **a** Bereken met een rekenmachine $102 - 51 \times 2$.
b Bereken ook $(102 - 51) \times 2$.

2 Reken eerst uit zonder rekenmachine en daarna met rekenmachine.
a $3 \times (112 - 22)$
b $(25 + 13) : (134 - 114)$
c $12{,}5 \cdot (64 : 8)$

3 Bereken (let op de volgorde van de bewerkingen).
a $2 + 3 \times 6$
b $(2 + 3) \times 6$
c $1 + 2 - 3 + 4 - 5$
d $6^2 + 3 \times 6^2$
e $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
f $5 + 12 : 3$
g $(6 + 12) : (6 - 12)$
h $2 - 3 \times 4 : 5$
i $3(4(5 + 7) - (6 \times 4))$
j $5^2 - 4^2 - 3^2$

4 Bereken.
a $2 \cdot (-3)^2 + (-3) + 1$
b $3 \cdot (-2)^2 + (-3)\ 2^2$
c $3 \cdot (1 - 2 \cdot (-3))^2$
d $3 \cdot (2 - 0{,}5)^2$

5 Bereken.
a $\sqrt{3^2 + 4^2}$
b $\sqrt{3^2 + \sqrt{4^2}}$
c $(\sqrt{\sqrt{3} + 6})^2$
d $\sqrt{9} - \sqrt{4}$
e $\sqrt{9 - 5}$

6 Zet de haken op de juiste plaats zodat de berekening klopt. Soms lukt het zonder haken.
a $2 \times 7 - 5 + 6 = 15$
b $2 \times 7 - 5 + 6 = 3$
c $2 \times 7 - 5 + 6 = 10$
d $2 \times 7 - 5 + 6 = 16$

7 **Wiskundesom leidt tot verhit getwitter**
De rekenopgave $8 : 2(2 + 2) = ?$ heeft tot een verhit debat geleid op Twitter.
Volgens sommigen is het juiste antwoord 16.
Anderen vinden dat 1 het juiste antwoord is.
Sommige rekenapparaten spreken elkaar tegen.
a Hoe kan het dat er twee verschillende antwoorden zijn?
b Wat is het enige juiste antwoord?

1

1.2 Rekenen met breuken

In deze paragraaf krijg je een overzicht van het rekenen met breuken. Het meeste zal een herhaling zijn van wat je vroeger hebt geleerd. In dit overzicht staat alles nog eens netjes bij elkaar.

Gelijknamige breuken
Van de breuk $\frac{17}{20}$ heet 17 de **teller** en 20 de **noemer**.
Twee breuken met dezelfde noemer heten **gelijknamig**. De breuken $\frac{17}{20}$ en $\frac{13}{20}$ zijn dus gelijknamig.

Gelijkwaardige breuken
De breuk $\frac{1}{2}$ staat voor 'de helft'. Dat geldt ook voor de breuken $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$. Die hebben allemaal de waarde 'de helft'. Deze breuken worden **gelijkwaardig** genoemd. Je kunt een breuk altijd vervangen door een gelijkwaardige breuk. Je kunt gelijkwaardige breuken maken door teller en noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen of door hetzelfde getal te delen.

Optellen van breuken
Omdat $\frac{17}{20} = 17 \times \frac{1}{20}$, dus 17 keer de breuk $\frac{1}{20}$, en ook $\frac{13}{20} = 13 \times \frac{1}{20}$ kun je beide breuken bij elkaar optellen.
Dus: $\frac{17}{20} + \frac{13}{20} = 17 \times \frac{1}{20} + 13 \times \frac{1}{20} = 30 \times \frac{1}{20} = \frac{30}{20}$.
De regel is:
Gelijknamige breuken kun je optellen of aftrekken door de tellers bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken.
Let op: de breuken moeten wel gelijknamig zijn.
Zijn twee breuken niet gelijknamig, dan maak je ze eerst gelijknamig door ze te vervangen door geschikte gelijkwaardige breuken. Aan het voorbeeld zie je hoe dat gaat:
$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$.

Breuken vermenigvuldigen
De helft van 3 is $\frac{3}{2}$. Je schrijft: $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.

De helft van $\frac{1}{3}$ is $\frac{1}{6}$. Je schrijft: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Op dezelfde manier kun je begrijpen dat $\frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{1}{7} = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = 5 \times \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$.
En ook dat $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{1}{7} = 15 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = 15 \times \frac{1}{14} = \frac{15}{14}$.

Hieraan zie je dat deze regel geldt:
Twee breuken kun je vermenigvuldigen door de tellers en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Dus: $\frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$.

Breuken delen
Je hebt een fles met 2 liter water. Die ga je verdelen over flesjes met $\frac{1}{3}$ liter inhoud. Je hebt dan 6 flesjes nodig. Je kunt dat opschrijven met breuken: $2 : \frac{1}{3} = \dfrac{2}{\frac{1}{3}} = 6$. Je kunt hiermee de regel voor het delen door een breuk begrijpen. Deze regel is:
Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

Dus: $\dfrac{2}{\frac{1}{3}} = 2 \times \frac{3}{1} = 2 \times 3 = 6$ en $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{2 \times 5} = \frac{21}{10}$.

OEFENINGEN

1 Vereenvoudig de volgende breuken zo ver mogelijk (zonder rekenmachine).

a $\frac{24}{32}$

b $\frac{56}{140}$

c $\frac{123}{321}$

d $\frac{456}{654}$

e $\frac{52}{78}$

f $\frac{357}{714}$

g $\frac{780}{36}$

h $\frac{1221}{44}$

2 Bereken en vereenvoudig zo ver mogelijk (zonder rekenmachine).

a $\frac{2}{3} + \frac{5}{8}$

b $1\frac{7}{8} + 3\frac{1}{4}$

c $8\frac{2}{7} - 3\frac{6}{7}$

d $6\frac{2}{5} - 3\frac{6}{7}$

e $-1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{6}$

f $\frac{35}{36} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

g $1\frac{2}{3} + \frac{5}{8} + 2\frac{1}{6}$

h $1\frac{5}{7} - 5 + 3\frac{1}{3}$

3 Bereken en vereenvoudig zo ver mogelijk (zonder rekenmachine).

a $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$

b $1\frac{7}{8} \cdot 3\frac{1}{5}$

c $\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{35}$

d $1\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{6}$

4 Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{50}{\frac{1}{4}}$

b $\frac{10}{-\frac{1}{3}}$

c $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{5}}$

d $\frac{1\frac{10}{13}}{2\frac{2}{3}}$

e $\frac{0,6}{0,4}$

f $\frac{1,2}{-0,02}$

5 Bereken.

a $\frac{2 \cdot 0,5 - 3}{1 - 3 \cdot 0,5}$

b $\frac{0,3 \cdot 3^2 - 3}{0,3}$

c $\frac{1 - 4 \cdot 0,25}{1 + 4 \cdot 0,25}$

d $\frac{4^2}{0,4^2}$

e $\left(\frac{4}{0,4}\right)^2$

f $\frac{2 + 5^2}{2 \cdot 3^2}$

1

1.3 Procenten

Met procenten geef je aan hoe groot een deel van het geheel is. Procent betekent letterlijk ‘per 100’ (uit het Latijn). Je gebruikt daarbij 100 als het geheel.

Voorbeeld
Bij een 5 literfles die gevuld is met 2 liter water is de verhouding deels gevulde fles staat tot volle fles als 2 staat tot 5. In een breuk schrijf je $\frac{2}{5}$, dus $\frac{2}{5} = 0{,}4$ deel van de fles is gevuld. Om dit naar procenten om te rekenen stel je de hele fles gelijk aan 100%. Het gevulde deel is dan $\frac{2}{5}$ van 100 is $\frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$. De fles is dus gevuld met 40% water.

Van procenten naar breuken
8% is 8 van de 100. Daarbij past de volgende breuk: $\frac{8}{100} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$.
Soms kun je de breuk met 100 als noemer niet zo snel omzetten in een eenvoudige breuk. Dat zie je in het volgende voorbeeld. 12,5% komt overeen met $\frac{12{,}5}{100}$. Die kun je vervangen door de volgende gelijkwaardige breuken: $\frac{12{,}5}{100} = \frac{25}{200} = \frac{50}{400} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$. 12,5% komt dus overeen met de breuk $\frac{1}{8}$.
Je kunt ook de breuk als kommagetal schrijven. Dan komt 12,5% overeen met $\frac{12{,}5}{100} = 0{,}125$.
Om van een percentage een breuk te maken neem je het percentage als teller en 100 als noemer. Probeer de breuk vervolgens zo ver mogelijk te vereenvoudigen of schrijf deze als kommagetal.

Van een breuk naar procenten
De breuk $\frac{1}{3}$ komt overeen met de verhouding 1 op 3. Omdat 100% het geheel is, neem je nu $\frac{1}{3}$ van 100%. Je berekent $\frac{100}{3} = 33{,}333\ldots$. Afgerond op twee decimalen komt 1 op 3 dus overeen met 33,33%.
Om bij een breuk het bijbehorende percentage te berekenen vermenigvuldig je de breuk met 100%.

Erbij en eraf
Zonder btw kost een broek €75. De prijs wordt met 21% btw verhoogd. Bij 21% hoort het kommagetal 0,21. De nieuwe prijs is €75 + 0,21 × €75 = €75 + €15,75 = €90,75.
Je kunt dit ook direct uitrekenen met 1,21 × €75 = €90,75.
Je schrijft dus het percentage 21% als kommagetal 0,21 en je neemt 1 + 0,21 = 1,21 om mee te vermenigvuldigen.
Bij de broek hoort een korting van 25%. De nieuwe prijs is €90,75 – 0,25 × €90,75 = €68,06.
Je kunt dit ook direct uitrekenen met 0,75 × €90,75 = €68,06.
Je schrijft 25% als kommagetal 0,25 en je vermenigvuldigt met 1 – 0,25 = 0,75.
***Percentage erbij* reken je uit door te vermenigvuldigen met 1 + percentage (als kommagetal).**
***Percentage eraf* reken je uit door te vermenigvuldigen met 1 – percentage (als kommagetal).**

Belangrijke procenten

	komt overeen met:			komt overeen met:	
100%	het geheel	1	10%	een tiende	$\frac{1}{10} = 0{,}10$
50%	de helft	$\frac{1}{2} = 0{,}50$	20%	een vijfde	$\frac{1}{5} = 0{,}20$
25%	een kwart	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	5%	een twintigste	$\frac{1}{20} = 0{,}05$
12,5%	een achtste	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	4%	een vijfentwintigste	$\frac{1}{25} = 0{,}04$
75%	driekwart	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	2%	een vijftigste	$\frac{1}{50} = 0{,}02$
$33\frac{1}{3}\%$	een derde	$\frac{1}{3} \approx 0{,}33$	1%	een honderdste	$\frac{1}{100} = 0{,}01$

OEFENINGEN

1 Bereken uit je hoofd.

- **a** 35% van 400
- **b** 90% van 900
- **c** 5% van 1200
- **d** 55% van 140
- **e** 15% van 350
- **f** 82% van 450
- **g** 130% van 90
- **h** 20% van 740
- **i** 0,5% van 120
- **j** 100,4% van 500

2 **a** 15% is 60. 100% is ...?
- **b** 45% is 80. 100% is ...?
- **c** Hoeveel procent van 800 is 28?
- **d** 100% is 690. Hoeveel is 5%?
- **e** De normale prijs is €105. Wat is de nieuwe prijs met 15% korting?
- **f** De rente op een lening is 2,5%. Hoeveel rente betaal je voor een lening van €25.000?

3 **a** Aanbieding in de supermarkt: '2 + 1 gratis'.
Hoeveel procent korting geeft deze supermarkt?
- **b** Een haring kost €2,50. In de aanbieding krijg je zes haringen voor €12,50.
Hoeveel procent korting is dit?

4 Drie concurrerende meubelzaken ontdekken dat ze een stoel voor dezelfde prijs aanbieden.
Daarop geeft meubelzaak A de eerstkomende maand een korting van 10%, meubelzaak B geeft een korting van 20% en meubelzaak C verandert de prijs niet.
De daaropvolgende maand geeft A nog eens 10% korting, B laat het bij de gegeven korting en C verandert nog steeds niets aan de prijs.
De derde maand doet A er weer 10% af, B verlaagt de 20% korting met nog eens 10% en C geeft nu een korting van 30%.
- Bij welke meubelzaak ben je het voordeligst uit?
- Probeer het eerst uit te rekenen met getallenvoorbeelden.
- Neem ook andere percentages voor btw en korting.
- Wat is je conclusie?
- Geef een onderbouwing voor je conclusie.

5 Veel materialen zetten uit of krimpen bij een verhoging of verlaging van temperatuur. De hoeveelheid uitzetting of krimp wordt aangegeven met de **lineaire uitzettingscoëfficiënt**. De waarde hiervan is afhankelijk van het materiaal. Voor staal is dat $12{,}0 \times 10^{-6}$ $m/m^{-1}T^{-1}$. Dit betekent dat per temperatuurstijging van 1 graad (kelvin) een staaf van 1 m $12{,}0 \times 10^{-6}$ m uitzet. $12{,}0 \times 10^{-6}$ m komt overeen met $12{,}0 \times 10^{-3}$ mm = 0,012 mm.
- **a** Bereken hiermee de uitzetting van een stalen balk van 20 m bij een temperatuurstijging van 15 graden.
- **b** Laat zien dat deze uitzetting van 0,012 mm op een staaf van 1 m bij een temperatuurstijging van 1°(K) overeenkomt met een lengtetoename van 0,0012%.

1

1.4 Rekenregels voor machten

Machten

De vermenigvuldiging (het product) van een aantal *gelijke* factoren kun je afkorten. Je kunt bijvoorbeeld $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ afkorten tot 4^5. Zo'n afkorting heet een **macht**.
In 4^5 is 4 het **grondtal** en 5 de **exponent**.
De exponent geeft dus aan hoeveel keer je het grondtal met zichzelf vermenigvuldigt.
Het berekenen van de waarde van een macht heet **machtsverheffen**.
In de formule $\underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ factoren}} = a^n$ stelt a een getal voor.
n is het aantal vermenigvuldigingen.
a^n spreek je uit als 'a tot de n-de' of als 'a tot de macht n'.
Het grondtal is a en de exponent is n.

Voor berekeningen met machten geldt een aantal rekenregels. Zie de voorbeelden hierna.

Voorbeelden

1 $7^2 \times 7^3 = (7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) = 7^{2+3} = 7^5$ (je telt de exponenten op)
Bij het vermenigvuldigen van twee machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op.

2 $\frac{7^5}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 7^{5-3} = 7^2$

(de exponent van de teller min de exponent van de noemer)
De exponent bij het delen van twee machten met hetzelfde grondtal is de exponent van de teller min de exponent van de noemer.

3 $(6^2)^3 = 6^2 \times 6^2 \times 6^2 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^{2 \times 3} = 6^6$
(je vermenigvuldigt de exponenten)
Bij het machtsverheffen van een macht vermenigvuldig je de exponenten.

4 $1 = \frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0$ (een getal tot de macht 0 heeft de waarde 1)

5 $\frac{1}{7^2} = \frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$ (bij een negatieve exponent hoort een breuk)

Machten met negatieve grondtallen

6 $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4 = 2^2$

7 $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8 = -2^3$
Bij een negatief grondtal a van a^n komt ook het minteken van dat grondtal n maal in het product voor.

Samenvatting

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$a^0 = 1$ voor elke $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ voor $a \neq 0$

$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times \ldots \times a^m}_{n \text{ factoren}} = a^{m \times n}$

$(ab)^n = \underbrace{ab \times \ldots \times ab}_{n \text{ factoren}} = a^n \times b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ factoren}} = \frac{a^n}{b^n}$

Gegeven is $a < 0$. Is n even, dan is $(a)^n > 0$. Is n oneven, dan is $(a)^n < 0$.

Let op: $-3^4 = -1 \times 3^4 = -1 \times 81 = -81$ en $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$.

De wetenschappelijke notatie

1 miljard = 1.000.000.000 = 10^9. Een micrometer of micron (of mu) is 0,000001 m. Dat kun je ook schrijven als 10^{-6} m. Door gebruik te maken van de machten van 10 kun je een vaste notatie maken voor grote of kleine getallen.
Heel grote of heel kleine getallen schrijf je dan in de **wetenschappelijke notatie**: $g = a \times 10^p$.
Hierin is a een decimaal getal tussen 1 en 10. Bij grote getallen is $p > 0$ en bij kleine getallen is $p < 0$.
Bijvoorbeeld: $12.009 = 1{,}2009 \times 10^4$ en $0{,}00012009 = 1{,}2009 \times 10^{-4}$.

OEFENINGEN

1 Bereken.

a $2^2 - 2$
b $2^3 - 2^2$
c $2^4 - 2^3$
d $\dfrac{2^{11} - 2^{10}}{2^{10}}$
e $3^3 - 3^2 + 3 - 1$
f $3^4 - 3^3 + 3^2 - 3$
g $3^5 - 3^4 + 3^3 - 3^2$

2 Bereken.

a $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
b $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$
c $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4$

3 Vereenvoudig tot één macht of een combinatie van machten.

a $3^7 \times 3^4$
b $5^2 \times 7^3 \times 5^4 \times 5^3 \times 7^4$
c $(3^7)^4$
d $(7 \times 11)^8$
e $(4^6 \times 6^4)^{-1}$
f $\left(\frac{5}{7}\right)^{11}$
g $\dfrac{2^{11}}{2^3}$
h $\dfrac{3^4 \times 3^{-2}}{3^7 \times 3^{-1}}$

4 Vereenvoudig tot één macht of een combinatie van machten.

a $(-2^3) \times b^5 \times 2^2 \times (-2)^7 \times b^6$
b $(x^4y^2z^5)^3$
c $(-p^2q^5)^3 \cdot (p^5q)^6$
d $-\left(-\dfrac{a^2b^5}{ab}\right)^3$
e $\dfrac{(x^2y^3)^2}{(-x)^3}$
f $(a^3)^{-2}$
g $a^{-7} \cdot \dfrac{5a^{-2}}{a^6}$

5 Schrijf de volgende getallen in de wetenschappelijke notatie.

a De snelheid van het licht is 300.000.000 m/sec.
b De massa van een stofdeeltje is 0,000000000753 kg.
c $(7 \times 10^4) \times (5 \times 10^6) \times (3 \times 10^2)$

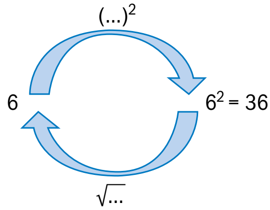
6 $30! = 30 \times 29 \times 28 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

a Bereken 30! op een wetenschappelijke rekenmachine. Geef het resultaat in twee decimalen nauwkeurig en de wetenschappelijke notatie.
b Doe hetzelfde als bij **a** voor $\dfrac{1}{30!}$.

1.5 Machten met gebroken exponenten

Tweedemachtswortels

$6^2 = 36$, dus $6 = \sqrt{36}$.
Worteltrekken is het omgekeerde van machtsverheffen.
Ook geldt $(-6)^2 = 36$. Je zou dus ook kunnen kiezen voor $-6 = \sqrt{36}$.
De afspraak is dat je altijd de positieve wortel kiest.



Samenvatting

$\sqrt{a}$ is het **positieve** getal waarvan de tweede macht gelijk is aan a. Dus: $(\sqrt{a})^2 = a$ en $a \geq 0$.
$\sqrt{a}$ heet de **tweedemachtswortel** (vierkantswortel) uit a.

Voorbeelden

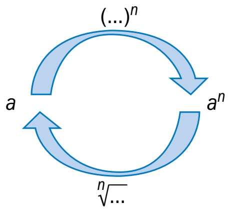
$\sqrt{-49}$ bestaat niet, want er is geen getal waarvan het kwadraat -49 is.
Let op: $\sqrt{4 + 16}$ is niet gelijk aan $\sqrt{4} + \sqrt{16} = 2 + 4$, maar $\sqrt{4 + 16} = \sqrt{(4 + 16)} = \sqrt{20}$.
Wel geldt: $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{4} \times \sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$.
Controle: $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{(4 \times 16)} = \sqrt{64} = 8$.

Derde- en vierdemachtswortels

$\sqrt[3]{27} = 3$, want $3^3 = 27$ (de derdemachtswortel is het tegengestelde van de derde macht).
$\sqrt[4]{81} = 3$, want $3^4 = 81$ (de vierdemachtswortel is het tegengestelde van de vierde macht).

***n*-demachtswortels**

Stel: $a \geq 0$, dan is $\sqrt[n]{a}$ de n-demachtswortel. Dat is het tegengestelde van de n-de macht.
$\sqrt[n]{a}$ is het positieve getal waarvan de n-de macht gelijk is aan a. Dus: $(\sqrt[n]{a})^n = a$ en ook: $\sqrt[n]{a^n} = a$.



Gebroken exponenten

Omdat $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ en $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$ schrijf je ook: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$
In plaats van de wortelnotatie kun je ook machten met **gebroken exponenten** gebruiken.
Zo is $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ en $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$.
Ook kun je $27^{\frac{2}{3}}$ berekenen: $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$.
In formule: $a^{\frac{p}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^p = (\sqrt[n]{a})^p$.
(NB: Gebroken exponenten gebruik je alleen bij positieve grondtallen.)

Rekenregels voor wortels

Alle rekenregels voor machten met gehele exponenten gelden ook voor machten met gebroken exponenten.
Belangrijke regels voor het rekenen met wortels zijn:

(1) $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ **(2)** $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ **(3)** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Wortels vereenvoudigen

Net als breuken kun je ook wortels vereenvoudigen. Je probeert het getal onder het wortelteken zo klein mogelijk te maken, bijvoorbeeld $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Niet alle wortels kun je zo vereenvoudigen zodat er alleen gehele getallen onder het wortelteken staan, maar bij de volgende opgaven is het de bedoeling dat je vereenvoudigt zoals in de voorbeelden is gedaan.

Voorbeelden

$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4} \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$ (regel (2))

Bij breuken werk je de wortels uit de noemer weg door onder en boven met de wortel te vermenigvuldigen. Zo kun je gemakkelijker een schatting maken van de grootte van de breuk.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx \frac{1}{3} \times 1{,}7 = 0{,}56666\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5 \cdot 25}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{25} \approx \frac{3}{5} = 0{,}6$$

OEFENINGEN

1 In de oefeningen hierna stellen de letters positieve getallen voor. Vereenvoudig.

a $\sqrt{24}$ **d** $\sqrt{40}$ **g** $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ **j** $\dfrac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

b $\sqrt{18}$ **e** $\sqrt{700}$ **h** $\dfrac{18}{\sqrt{12}}$ **k** $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$

c $\sqrt{98}$ **f** $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ **i** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

2 Voorbeeld: $\sqrt[4]{256} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$. Bereken op deze manier.

a $\sqrt[5]{1024}$ **c** $\sqrt[3]{243 \times 729^{-\frac{1}{9}}}$

b $\sqrt[3]{216}$ **d** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[3]{625}$

3 Werk de wortel weg in de noemer, zoals in de voorbeelden.

a $\dfrac{36}{4\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{3}}$ **b** $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{36}}$

4 Vereenvoudig zo veel mogelijk en schrijf als macht.

a $\sqrt{a^2b^2}$ **c** $\sqrt{pq} \cdot \sqrt{pq^3}$

b $\sqrt[9]{a^{\frac{3}{2}}}$ **d** $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$

5 Schrijf met gebroken exponenten. Voorbeeld: $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}}$

a $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^3c^5}}$ **c** $\dfrac{s}{\sqrt{s^3}}$

b $\sqrt[3]{\dfrac{p^3q^4}{r^7}}$ **d** $\dfrac{\sqrt{p}\sqrt[3]{pq}}{q^2}$

6 Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Dat wil zeggen: laat geen oneigenlijke machten (in dit geval gebroken exponenten) in je antwoord staan.

a $\sqrt[4]{ab^6} \cdot \sqrt[6]{a^9b^3}$ **d** $\dfrac{3}{b^7} \cdot (4b\sqrt{b})^2$

b $\dfrac{\sqrt[5]{ab^9}}{\sqrt[10]{a^{12}b^3}}$ **e** $(\sqrt[8]{3})^2 \cdot \sqrt[6]{3^3} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$

c $\sqrt{b^{-6}} \cdot b^2$ **f** $\dfrac{4\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{2})^2}$

1.6 Afronden

Soms ligt de waarde van een getal niet precies vast of is het niet nodig om deze precies vast te leggen. Door een getal af te ronden krijg je een schatting van de grootte.

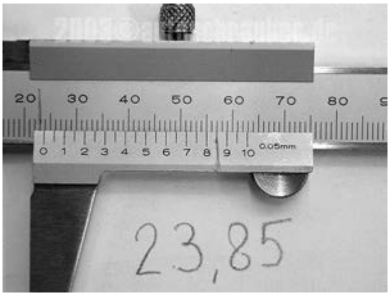
Getallen rond je op de volgende manier af:
1 Geef van tevoren aan op welke decimaal (honderdtallen, tientallen, helen, tienden, honderdsten…) je wilt afronden.
2 Kijk naar de waarde van één decimaal verder van het aantal gekozen decimalen.
3 Is de waarde van die decimaal 5 of hoger? Rond dan naar boven af.
4 Is de waarde van die decimaal kleiner of gelijk aan 4? Rond dan naar beneden af.

Voorbeelden
- Je gaat 3,1457 afronden op twee decimalen nauwkeurig. De derde decimaal is een 5. Je rondt dus naar boven af. De afronding is 3,15.
- Je gaat 3,1457 afronden op één decimaal nauwkeurig. De tweede decimaal is een 4. Nu rond je naar beneden af. Het resultaat is 3,1.
- Je gaat 31.457 afronden op tientallen nauwkeurig. Na het tiental 5 staat een 7. Je rondt dus naar boven af. De afronding is 31.460.
- Je gaat 31.457 afronden op honderdtallen nauwkeurig. Na het honderdtal 4 staat een 5. Je rondt dus naar boven af. De afronding is 31.500. Je kunt ook direct zien dat 31.457 dichter bij 31.500 ligt dan bij 31.400.
- Je gaat 31.457 afronden op duizendtallen nauwkeurig. Je ziet direct dat 31.457 dichter bij 31.000 ligt dan bij 32.000. Daarom is 31.000 de correcte afronding in duizendtallen.

De situatie bepaalt het aantal decimalen waarop je afrondt.
De afstand langs autowegen bijvoorbeeld wordt aangegeven met hectometerpaaltjes. Dat gebeurt op 100 m nauwkeurig, of op één decimaal nauwkeurig als je in kilometers rekent.
Bij digitale geldbedragen wordt aan de kassa op twee decimalen nauwkeurig gerekend.
Bij contante betaling wordt op 5 cent nauwkeurig afgerond.

Let op
- Bij het rekenen met een rekenmachine reken je zo lang mogelijk door met niet-afgeronde getallen. Pas aan het eind van de berekening ga je de uitkomst afronden. Rond nooit tussendoor af!
- Om je uitkomst op een rekenmachine (of op een kassa) te controleren kan het handig zijn de berekening met geschatte tussenwaarden na te lopen. Dit kan echter alleen een controle achteraf zijn; het kan nooit de juiste uitkomst geven.

De nonius
Een schuifmaat bestaat uit een **liniaal** (het vaste gedeelte) en de **nonius** (een schuif).
Met behulp van deze nonius kun je op 0,05 mm nauwkeurig een maat aflezen. Je ziet de 0 van de nonius tussen 23 en 24 cm staan. Op de nonius staat een streepje in het midden tussen 8 en 9 cm, precies bij een streepje van de liniaal. Dit betekent dat je 23,85 cm hebt gemeten. Je zoekt dus op de nonius een streepje dat zo goed mogelijk onder een streepje van de liniaal staat. De waarde van dat streepje op de liniaal zelf doet er dus niet toe.



OEFENINGEN

1 **a** Rond af op honderdtallen: 7.832 18.015 8.195 11.075
b Rond af op duizendtallen: 7.832 18.015 8.195 11.075
c Rond af op een geheel getal: 5,76 5,49 4,73 5,50
d Rond af op tienden: 11,27 0,2345 6,091 20,40

2 **a** Van welk van de volgende drie getallen is 4,7 miljoen de afronding: 4.752.300, 4.685.998 of 4.642.405?
b 0,2 is de afronding van een getal op tienden. Welke getallen in twee decimalen kunnen hier zijn afgerond?

3 Geef een afronding van het getal 6.285,195 …
a … op twee decimalen nauwkeurig.
b … op één decimaal nauwkeurig.
c … op tienden nauwkeurig.
d … op honderdtallen nauwkeurig.

4 Rond af op mm nauwkeurig:
a 35,765 cm
b 357,65 cm
c 35,765 mm
d 357,65 mm

5 Susan heeft een 5,45 behaald voor haar toets. Ze zegt dat ze een voldoende heeft behaald, want 5,45 rond je af naar 5,5 en dat kun je afronden naar een 6. Wat doet Susan verkeerd?

6 Met een schuifmaat meet je de lengte van een latje. De 0 van de nonius staat tussen 35 en 36 mm. De 6 van de nonius valt precies samen met een streepje op de schuifmaat.
Welke lengte heb je afgemeten?

7 Nanometer (nm) betekent een miljardste meter.
a Schrijf 546 nm in de wetenschappelijke notatie $a \times 10^p$ met *a* afgerond op twee cijfers nauwkeurig.
b Schrijf 546 nm in de wetenschappelijke notatie met *a* afgerond op een geheel getal.

1.7 Toepassen: Nauwkeurigheid en significante cijfers

Geen enkele meting is 100% nauwkeurig. Daarom is het belangrijk dat je een beeld krijgt van de nauwkeurigheid van die meting. Je meet bijvoorbeeld de breedte van een plank met een rolmaat die een maatverdeling heeft waarbij de streepjes op 1 mm afstand van elkaar staan. Je kunt dan op slechts 1 mm nauwkeurig aflezen en je meet dat de breedte van de plank 21,4 cm is. De werkelijke breedte van de plank ligt tussen 21,35 en 21,45 cm. In dit geval weet je dat 21,4 cm nauwkeurig is. Je zegt dan dat de meting 21,4 cm drie **significante** cijfers heeft.
Je kunt de uitkomst ook in mm geven. De breedte is 214 mm. Ook dan heeft de meting drie significante cijfers.
Bij de meting met de nonius in paragraaf 1.6 is de uitkomst 23,85 cm. In dit geval heeft de meting vier significante cijfers. Omdat de aangegeven nauwkeurigheid 0,05 is, ligt de echte waarde tussen 23,845 en 23,855 cm.

Algemeen

Het aantal als betrouwbaar bekende cijfers in een meting wordt het **aantal significante cijfers** genoemd. De betrouwbaarheid van een meting wordt bepaald door de manier waarop is gemeten.

Voorbeeld

'De afstand tussen Groningen en Amsterdam is ruwweg 180 km.' Dit is een geschatte waarde zonder nadere nauwkeurigheidsgrenzen. Deze uitkomst heeft twee significante cijfers, namelijk 1 en 8. De 0 telt in dit geval niet mee. Als 180 km een afgeronde waarde is waarvan de echte waarde ligt tussen 179,5 en 180,5, dan heeft 180 drie significante cijfers. Als er nog preciezer is gemeten – bijvoorbeeld met hectometerpaaltjes, dus met een nauwkeurigheid van 0,1 km – dan geef je de afstand aan met 180,0 km. Deze meting heeft vier significante cijfers.
Het aantal significante cijfers hangt af van het meetinstrument. In het geval van 180 of 18.000 kun je niet zonder meer zeggen dat de 0 aan het eind niet meetelt. Het aantal significante cijfers blijft onbekend zolang je niet weet hoe er gemeten is.
Met de wetenschappelijke notatie kun je in deze gevallen het aantal significante cijfers duidelijk maken:
$1{,}8 \times 10^2$ is 180 met twee significante cijfers,
$1{,}80 \times 10^2$ is 180 met drie significante cijfers.

Rekenen met significante cijfers

Volgens een stappenteller loopt een wandelaar 3,25 km in 5.312 stappen. 3,25 km heeft drie significante cijfers en 5.312 heeft vier significante cijfers. Om de lengte van een stap in meters te berekenen deel je 3.250 door 5.312. Ook 3.250 heeft in dit geval drie significante cijfers.
$3.250 : 5.312 \approx 0{,}6118222...$ Omdat 3.250 het kleinste aantal significante cijfers heeft in deze berekening neem je dat aantal over in de uitkomst. De significante uitkomst is dus $3.250 : 5.312 \approx 0{,}611$. Op deze manier neem je zo weinig mogelijk onnauwkeurigheden mee in je berekening.

Voorbeeld

Met een rolmaat zijn de breedte en de hoogte van een kamer opgemeten. De rolmaat meet horizontaal op 1 mm en verticaal op 1 cm nauwkeurig. De breedte is 5,430 m en de hoogte is 2,40 m. De oppervlakte van de wand is $5{,}430 \times 2{,}40 = 13{,}032\ m^2$. We mogen het antwoord niet nauwkeuriger opgeven dan de minst nauwkeurige meetwaarde. In dit geval is het aantal significante cijfers voor de breedte van de kamer 4 en voor de hoogte van de kamer 3. Het antwoord mag dus in drie significante cijfers gegeven worden.

Het antwoord is dan 13,0 m². Hierbij hebben we naar beneden afgerond omdat het eerste cijfer na de drie significante cijfers in het antwoord een 3 is.

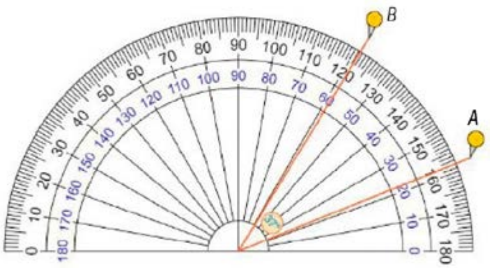
Algemeen
Het eindresultaat van een vermenigvuldiging of deling heeft ten hoogste evenveel cijfers als het kleinste aantal significante cijfers in de berekening.

OEFENINGEN

1 Noem van de volgende getallen het aantal significante cijfers en het aantal decimalen.

a 98,7
b 98,70
c 9,87
d 0,978
e 0,0987
f 0,09870

2 **a** Hebben 0,0123 en 0,00569 evenveel significante cijfers?
b Hebben 123 en 5,69 × 10^5 evenveel significante cijfers?



3 **a** Met de binnenste blauwe schaal van de gradenboog is de onderste hoek A gemeten. Hoe groot is die hoek?
b Hoe nauwkeurig kun je aflezen?
c Wat is correcter als resultaat van deze meting: 22° of 22,0°?
d Hoe groot is de bovenste hoek B van de buitenste schaal?
e Hoeveel significante cijfers horen bij deze meting?

4 Een vloer heeft een afmeting van 6,23 m bij 12,54 m.
Wat is in dit geval de correcte weergave van de oppervlakte?
a 78,1242 m² **b** 78 m² **c** 78,12 m² **d** 78,1 m²

5 Bij het tanken blijkt dat een auto 45,3 liter benzine heeft verbruikt over een afstand van 602,4 km.
a Bereken het verbruik per 100 km in een correct aantal significante cijfers.
b Bereken hoeveel km de auto kan rijden op 1 liter benzine in een correct aantal significante cijfers.

6 De rekenmachine en het aantal significante cijfers
a Je deelt met een rekenmachine 5,3 door 2,7. De rekenmachine geeft als antwoord 1,96296296296296.
Wat is het antwoord met het juiste aantal significante cijfers?
b Met een rekenmachine vermenigvuldig je 2,5 met 3,2. Het antwoord is 8.
Wat is het antwoord met het juiste aantal significante cijfers?

1

Hoofdzaken

Wat is de juiste volgorde van de rekenbewerkingen?

1 Uitrekenen wat tussen haakjes staat.
2 Machtsverheffen en worteltrekken.
3 Vermenigvuldigen en delen in de volgorde waarin ze staan.
4 Optellen en aftrekken in de volgorde waarin ze staan.

Wat is worteltrekken?

Worteltrekken is de omgekeerde bewerking van kwadraat nemen, dus $7^2 = 49$ en $\sqrt{49} = 7$.

Hoe kun je breuken bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken?

- Dat kan alleen als de breuken dezelfde noemer hebben, oftewel gelijknamig zijn.
- Zijn ze niet gelijknamig, vervang ze dan door gelijkwaardige breuken die wel gelijknamig zijn.
- Tel de tellers bij elkaar op.
  Voorbeeld: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$

Hoe kun je van breuken procenten maken en hoe kun je van procenten breuken maken?

Om van een percentage een breuk te maken neem je het percentage als teller en 100 als noemer.
Om het bijbehorende percentage bij een breuk te berekenen vermenigvuldig je de breuk met 100%.

Voorbeelden: $5\% = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$ en $\dfrac{1}{7} \sim \dfrac{100}{7} \approx 14{,}3\%$

Hoe reken je met percentage erbij of eraf?

Percentage erbij reken je uit door te vermenigvuldigen met 1 + percentage (als kommagetal).
Percentage eraf reken je uit door te vermenigvuldigen met 1 – percentage (als kommagetal).

Voorbeeld: €53 en 21% erbij bereken je met 1,21 × €53 = €64,13.

Hoe rond je een getal af?

1 Geef van tevoren aan op welke decimaal (honderdtallen, tientallen, helen, tienden, honderdsten...) je wilt afronden.
2 Kijk naar de waarde van één decimaal verder van het aantal gekozen decimalen.
3 Is de waarde van die decimaal 5 of hoger? Rond dan naar boven af.
4 Is de waarde van die decimaal kleiner of gelijk aan 4? Rond dan naar beneden af.

Hoe reken je met machten?

Bij het **vermenigvuldigen** van twee machten met gelijk grondtal tel je de exponenten op: $g^p \cdot g^q = g^{p+q}$.
De exponent bij het **delen** van twee machten met hetzelfde grondtal is de exponent van de teller min de exponent van de noemer: $\dfrac{g^p}{g^q} = g^{p-q}$.
Bij het **machtsverheffen** van een macht vermenigvuldig je de exponenten: $(g^p)^q = g^{p \cdot q}$.

Waarom is $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$?

Omdat $(a^{\frac{p}{n}})^n = a^{\frac{p \cdot n}{n}} = a^p$.

Toets

1 Bereken (let op de volgorde van de bewerkingen).

a $6 - 3 \times 2$
b $(6 + 3) \times 2$
c $5 - 4 + 3 - 2 - 1$
e $4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$
f $4^2 - 3^2 \times 2^2 - 1^2$
g $(1 + 3) : (1 - 3)$
d $(5 - 4) + (3 - 2) - 1$
h $2 - (3 \times 4) : 6$
i $6 \cdot (5 \cdot (4 + 3)) - (6 \times 34)$
j $5^2 \times 4^2 - 3^2$

2 Bereken en vereenvoudig zo ver mogelijk.

a $\frac{2}{4} + \frac{5}{6}$
b $2\frac{3}{8} + 1\frac{3}{4}$
c $6\frac{3}{7} - 2\frac{2}{7}$
d $5\frac{2}{5} - 2\frac{2}{7}$
e $-3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{6}$
f $\frac{1}{63} - \frac{1}{129} + \frac{1}{129}$
g $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
h $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

3 Bereken zonder rekenmachine.

a $\dfrac{20}{\frac{1}{3}}$
b $\dfrac{3}{-\frac{1}{6}}$
c $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}}$
d $\dfrac{0{,}9}{0{,}3}$
e $\dfrac{4{,}9}{-0{,}07}$
f $\dfrac{1\frac{10}{13}}{2\frac{2}{3}}$

4 **a** Als je een getal deelt door $\frac{1}{2}$ krijg je 6. Welk getal is dit?
b Als je een getal deelt door $\frac{3}{4}$ krijg je 4. Welke getal is dit?

5 Een paar schoenen kost €120,90 inclusief 21% btw. Wat is de prijs zonder btw?

6 De maximale doorbuiging van een balk met een puntlast F(N) die ligt op twee steunpunten kun je berekenen met de formule

$$\delta = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} \ (\delta \text{ in mm}).$$

F (N) is het gewicht in het midden van de balk, l (mm) is de lengte van de balk, E (N/mm^2) is de elasticiteitsmodulus van het materiaal en I (mm^4) is het kwadratisch oppervlaktemoment van de balk.

a Voor een rechthoekige balk met breedte b en hoogte h bereken je I met de formule $I = \frac{1}{12} b \cdot h^3$.
Een stalen balk is 3 cm hoog en 20 cm breed. Bereken I.

b Voor een stalen profiel is $E = 210.000$ N/mm^2. Op een balk met een lengte van 5 m rust in het midden een gewicht van 800 N.
Bereken met deze gegevens de maximale doorbuiging van de balk.

c Hoeveel significante cijfers heeft je uitkomst?